Б. И. АЛЕКСАНДРОВ и П. С. МОДЕНОВ

ПОСОБИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ

ДЛЯ ПОДГОТОВИТЕЛЬНЫХ КУРСОВ МГУ

ИЗДАТЕЛЬСТВО МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

1967

Б. И. АЛЕКСАНДРОВ и П. С. МОДЕНОВ

ПОСОБИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ

ДЛЯ ПОДГОТОВИТЕЛЬНЫХ КУРСОВ МГУ

ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
1967

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Географический факультет 3
§ 2. Геологический факультет 7
§ 3. Биолого-почвенный факультет 11
§ 4. Химический факультет 18
§ 5. Филологический факультет 24
§ 6. Экономический факультет 28
§ 7. Физический факультет 49
Вопросы, предлагавшиеся на устном экзамене по математике на физическом факультете 131
§ 8. Механико-математический факультет 152
Задачи на составление и решение уравнений . . . 158
Геометрические задачи 166
Решение неравенств 182
Решение нестандартных задач 190
§ 9. Дополнительные примеры и задачи 208
Арифметика и алгебра 208
Геометрия. Планиметрия 259
Стереометрия 272
§ 10. Темы контрольных работ 310
Ответы 316

Настоящая книга ставит своей целью помочь подготовиться к конкурсным экзаменам на различные факультеты учащимся подготовительных курсов при Московском университете.

В книге приведены варианты письменных приемных экзаменов по математике в МГУ в 1965 г., а по физическому факультету, кроме того,— вопросы, предлагавшиеся на устном экзамене.

Для самостоятельных упражнений имеется много примеров и задач, взятых из различных руководств (§ 9). Часть примеров разобрана. Для ряда примеров ответы даны непосредственно в тексте.

Для учащихся подготовительных курсов при МГУ помещены темы контрольных работ.

По просьбе дирекции курсов § 5, 6, 8 написаны М. К. Потаповым и Г. В. Дорофеевым.

§ 1. ГЕОГРАФИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

ВАРИАНТЫ ПИСЬМЕННЫХ ЭКЗАМЕНОВ

(дневное отделение)

Вариант 1

1. Если пароход и катер плывут по течению, то расстояние от пункта A до пункта B пароход покрывает в полтора раза быстрее, чем катер, при этом катер каждый час отстает от парохода на 8 *км*. Если же они плывут против течения, то пароход проходит путь от B до A в два раза быстрее катера. Найти скорости парохода и катера в стоячей воде.

2. В окружность радиуса 1 вписан равнобедренный треугольник, боковая сторона которого в два раза больше основания. В этот треугольник вписана окружность. Найти ее радиус.

3. Найти все решения уравнения

$$1 - \sin^4 x - \frac{5}{3}\cos^4 x = 0.$$

4. Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{2}} (2x + 3) > 0.$$

Вариант 2

5. Два тела движутся по окружности равномерно и в одну сторону. Первое тело проходит окружность на 2 *сек* быстрее второго и догоняет второе тело каждые 12 *сек*. За какое время каждое тело проходит окружность?

6. В четырехугольник, три последовательные стороны которого равны соответственно 2, 3 и 4, вписана окружность радиуса 1,2. Найти площадь этого четырехугольника.

7. Найти все решения уравнения

$$8\cos^4 x - \cos 4x = 1.$$

8. Решить неравенство

$$x^4 - 5x^2 + 4 < 0.$$

Вариант 3

9. Две суммы денег — всего 5000 руб. — положены на некоторые сроки в сберкассу из расчета 3% годовых (проценты начисляются от первоначальной суммы в момент выдачи вклада пропорционально времени пребывания вклада в сберкассе). Каждая из этих сумм дала 60 руб. дохода. Первая сумма находилась в сберкассе на четыре месяца меньше, чем вторая. Как велика каждая сумма и на какой срок она была положена в сберкассу?

10. В ромб площадью 1 вписан круг площадью $\frac{1}{2}$. Определить длину стороны ромба.

11. Найти все решения уравнения

$$\cos x - \sqrt{2}\sin\frac{x}{2} = 1.$$

12. Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 5x + 4) < 0.$$

Вариант 4

13. Переднее колесо повозки на некотором пути сделало на 1000 оборотов больше заднего. Если бы длина окружности переднего колеса была в полтора раза больше, то на том же пути оно сделало бы на 200 оборотов больше заднего колеса. Чему равны длины окружностей колес, если известно, что длина окружности заднего колеса на 1,5 *м* больше длины окружности переднего колеса?

14. В равнобочную трапецию, верхнее основание которой равно единице, вписана окружность радиуса 1. Найти площадь трапеции.

15. Найти все решения уравнения

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{8} - x\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{8} + x\right) = \frac{1}{2}.$$

16. Решить неравенство

$$4^x < 2^{x+1} + 3.$$

Вариант 5

17. С двух участков земли собрано соответственно 140 *т* и 550 *т* свеклы, причем с 1 $м^2$ второго участка собрано на 2 *кг* меньше, чем с 1 $м^2$ первого участка. После применения удобрений урожай на первом участке удвоился, а на втором — утроился и с 1 $м^2$ второго участка собрали на 1 *кг* больше, чем с 1 $м^2$ первого участка. Определить размеры участков

18. Радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, равен 5 *см*, а радиус окружности, вписанной в этот треугольник, равен 2 *см*. Найти периметр этого треугольника.

19. Найти все решения уравнения

$$2\cos 2x = \sqrt{6}\,(\cos x - \sin x).$$

20. Решить неравенство

$$\frac{2x+1}{x-2} > \frac{x+4}{2x-5}.$$

Решение варианта 1

1. Обозначим расстояние от A до B через s *км*, скорость течения — через v_1 *км/час*, скорость парохода в стоячей воде через v_2 *км/час*.

По условию задачи катер каждый час отстает от парохода на 8 *км*, следовательно, его скорость $v_2 - 8$. Когда пароход и катер плывут по течению реки, то скорость парохода равна $v_1 + v_2$, а скорость катера $v_2 - 8 + v_1$.

Расстояние от пункта A до пункта B пароход покрывает в полтора раза быстрее, чем катер, следовательно,

$$\frac{1{,}5s}{v_2+v_1} = \frac{s}{v_2+v_1-8}. \qquad (1)$$

Если же пароход и катер плывут против течения, то скорость парохода $v_2 - v_1$, а скорость катера $v_2 - 8 - v_1$.

По условию задачи пароход проходит путь от B до A в два раза быстрее катера, т. е.

$$\frac{2s}{v_2-v_1} = \frac{s}{v_2-v_1-8}. \qquad (2)$$

Решая систему уравнений (1), (2), найдем

$$v_1 = 4\ км/час, \quad v_2 = 20\ км/час,$$

значит, скорость катера в стоячей воде равна 12 *км/час*.

2. Так как радиус окружности S, описанной вокруг треугольника ABC, равен 1, а основание AB в два раза меньше боковой сто-

роны ($AC=CB$), то расстояние OM от центра окружности S до стороны AC равно $\frac{1}{4}$ (в силу подобия треугольников CAD и COM), а значит $CM=\frac{\sqrt{15}}{4}$ (рис. 1).

Пусть O_1 — центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Обозначая через r радиус этой окружности, имеем

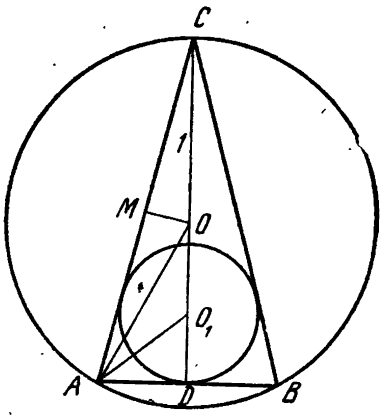

Рис. 1

$$\frac{AC}{AD}=4=\frac{CO_1}{O_1D}=\frac{CO_1}{r}.$$

Значит, $CO_1=4r$, а потому $OD=5r-1$ и, далее,

$$AD=\frac{\sqrt{15}}{8},\quad OA=1.$$

Из прямоугольного треугольника AOD находим

$$(5r-1)^2=1^2-\frac{15}{64}=\frac{49}{64},$$

$$5r-1=\frac{7}{8},\quad r=\frac{3}{8}.$$

3. Заменяя $\sin^2 x$ на $1-\cos^2 x$, получим

$$1-(1-\cos^2 x)^2-\frac{5}{3}\cos^4 x=0,$$

или

$$2\cos^2 x-\frac{8}{3}\cos^4 x=0.$$

Таким образом, либо $\cos x=0$, либо $\cos^2 x=\frac{3}{4}$, а потому $x=\frac{\pi}{2}(2k+1)$ и $x=k\pi\pm\frac{\pi}{6}$, где k принимает все целые значения.

4. Областью определения функции $\log_{\frac{1}{2}}(2x+3)$ является интервал $x>-\frac{3}{2}$. На основании свойств логарифмической функции с основанием, меньшим единицы, данное неравенство равносильно системе следующих неравенств:

$$x>-\frac{3}{2},\quad 2x+3<1.$$

Отсюда

$$-\frac{3}{2}<x<-1.$$

§ 2. ГЕОЛОГИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

ВАРИАНТЫ ПИСЬМЕННЫХ ЭКЗАМЕНОВ

(дневное отделение)

Вариант 1

1. Два туриста вышли из A в B одновременно, причем первый турист каждый километр пути проходит на 5 *мин* быстрее второго. Первый, пройдя пятую часть пути, вернулся в A и, пробыв там 10 *мин*, снова пошел в B. При этом в B оба туриста пришли одновременно. Каково расстояние от A до B, если второй турист прошел его за 2,5 *час*?

2. На каждой медиане треугольника взята точка, делящая медиану в отношении 1 : 3, считая от вершины. Во сколько раз площадь треугольника с вершинами в этих трех точках меньше площади исходного треугольника?

3. Найти все решения уравнения

$$\operatorname{ctg}^2 x - \operatorname{tg}^2 x = 16 \cos 2x.$$

4. Решить неравенство

$$\log_2 \frac{x-3}{x+2} < 0.$$

Вариант 2

5. Пассажир, едущий из города A в город B, половину затраченного на путь времени ехал на автобусе, а половину на автомашине. Если бы он весь путь от A до B проехал на автобусе, то это заняло бы у него в полтора раза больше времени. Во сколько раз быстрее проходит путь от A до B автомашина, чем автобус (предполагается, что скорости автобуса и автомашины постоянны)?

6. В равнобедренный треугольник вписан квадрат единичной площади, сторона которого лежит на основании треугольника. Найти площадь треугольника, если известно, что центры тяжести треугольника и квадрата совпадают (центр тяжести треугольника лежит на пересечении его медиан).

7. Найти все решения уравнения

$$\sin x + \sin 3x = 4 \cos^3 x.$$

8. Решить неравенство

$$\frac{5}{3 - 2x - x^2} < 1.$$

Вариант 3

9. Из пункта A в пункт B против течения выехала моторная лодка. В пути сломался мотор, и пока его 20 *мин* чинили, лодку снесло вниз по реке. Определить, насколько позднее прибыла лодка в пункт B, если известно, что обычно путь из A в B лодка проходит в полтора раза дольше, чем путь из B в A.

10. В равнобедренном треугольнике высота, опущенная на основание, в полтора раза меньше радиуса описанной окружности. Найти отношение основания к боковой стороне.

11. Найти все решения уравнения

$$\sin x + \sin 2x = \cos x + 2\cos^2 x.$$

12. Решить неравенство

$$2 - \log_2(x^2 + 3x) > 0.$$

Вариант 4

13. Из пунктов A и B навстречу друг другу выехали одновременно два автобуса, причем первый, имея вдвое бо́льшую скорость, проехал весь путь на 1 *час* быстрее второго. На сколько минут раньше произошла бы встреча этих автобусов, если бы скорость второго автобуса увеличилась и стала бы равной скорости первого автобуса?

14. Около окружности единичного радиуса описана равнобочная трапеция, у которой одно основание вдвое больше другого. Определить среднюю линию трапеции.

15. Найти все решения уравнения

$$\cos 3x - 2\cos 2x + \cos x = 0.$$

16. Решить неравенство

$$9^x < 3^x + 2.$$

Вариант 5

17. Двое рабочих, работая одновременно, выполнили всю работу за 5 дней. Если бы первый рабочий работал в два раза быстрее, а второй в два раза медленнее, то всю работу они выполнили бы за 4 дня. За сколько дней выполнил бы всю работу первый рабочий?

18. В окружность радиуса 1 вписана трапеция, у которой нижнее основание вдвое больше каждой из остальных сторон. Найти площадь трапеции.

19. Найти все решения уравнения

$$1 + \sin 2x = \sin x + \cos x.$$

20. Решить неравенство

$$\sqrt{x+2} > x.$$

Решение варианта 1

1. Положим $AB=x$. Пусть t — время, за которое первый турист проходит 1 *км*; тогда второй турист проходит один километр за $t+\frac{1}{12}$ *час*.

По условию задачи первый турист, пройдя пятую часть пути AB, вернулся в A и, пробыв там $\frac{1}{6}$ *час*, снова пошел в B, следовательно, первый турист прошел расстояние, равное $\frac{7}{5}x$.

Общее время нахождения первого туриста в пути (вместе с остановкой в пункте A) равно $\frac{7tx}{5}+\frac{1}{6}$.

Таким образом, по условию задачи

$$\frac{7tx}{5}+\frac{1}{6}=\frac{5}{2}.$$

Второе уравнение, определяющее время нахождения второго туриста в пути, имеет вид

$$\frac{x(12t+1)}{12}=\frac{5}{2}.$$

После упрощения получим систему уравнений

$$xt=\frac{5}{3},$$

$$x(12t+1)=30.$$

Решая эту систему, найдем $x=10$ *км*.

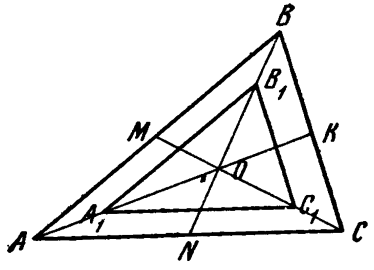

Рис. 2

2. Пусть ABC — произвольный треугольник, K, N, M — соответственно середины сторон BC, CA и AB, а O — точка пересечения медиан AK, BN и CM. Возьмем на медианах AK, BN и CM соответственно точки A_1, B_1 и C_1, такие, что (рис. 2)

$$\frac{AA_1}{A_1K}=\frac{BB_1}{B_1N}=\frac{CC_1}{C_1M}=\frac{1}{3}.$$

Так как по свойству медиан треугольника

$$\frac{AO}{OK}=\frac{BO}{ON}=\frac{CO}{OM}=2,$$

то из соотношений

$$\frac{AA_1}{A_1K}=\frac{1}{3},\ \frac{AO}{OK}=2,\ \text{следовательно,}\ OK=\frac{AO}{2}$$

находим $$\frac{AO - A_1O}{A_1O + \frac{AO}{2}} = \frac{1}{3},$$

откуда $$\frac{OA_1}{OA} = \frac{5}{8}.$$

Аналогично доказывается, что

$$\frac{OB_1}{OB} = \frac{5}{8}, \quad \frac{OC_1}{OC} = \frac{5}{8}.$$

Таким образом, треугольник $A_1B_1C_1$ получается из треугольника ABC подобным преобразованием с центром O и коэффициентом подобия, равным $^5/_8$. Поэтому отношение площади треугольника $A_1B_1C_1$ к площади треугольника ABC равно квадрату коэффициента подобия, т. е. $^{25}/_{64}$.

Отношение сходственных сторон треугольников $A_1B_1C_1$ и ABC равно коэффициенту подобия, т. е. $\frac{5}{8}$.

3. Произведем над данным уравнением следующие эквивалентные преобразования:

$$\frac{\cos^4 x - \sin^4 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = 16 \cos 2x,$$

$$\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = 16 \cos 2x,$$

$$\frac{\cos 2x}{\sin^2 2x} = 4 \cos 2x,$$

$$\cos 2x \left(\frac{1}{\sin^2 2x} - 4 \right) = 0,$$

$$\frac{\cos 2x \left(\sin^2 2x - \frac{1}{4} \right)}{\sin^2 2x} = 0.$$

Так как при $\sin 2x = 0$ имеем $\cos 2x = \pm 1$ и $\sin^2 2x - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$, то при $\sin 2x = 0$ числитель дроби, входящей в левую часть уравнения, не равен нулю. Отсюда последнее уравнение, а следовательно и данное, эквивалентно уравнению

$$\cos 2x \left(\sin^2 2x - \frac{1}{4} \right) = 0.$$

Отсюда либо $\cos 2x = 0$, следовательно,

$$2x = \frac{\pi}{2} + k\pi,$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \qquad (1)$$

либо

$$\sin^2 2x = \frac{1}{4},$$

откуда

$$2x = k\pi \pm \frac{\pi}{6},$$

$$x = \frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{12}. \qquad (2)$$

В формулах (1) и (2) k принимает все целые значения.

4. Так как основанием логарифма является число, бо́льшее 1, то неравенство

$$\log_2 \frac{x-3}{x+2} < 0$$

будет выполнено тогда и только тогда, когда

$$0 < \frac{x-3}{x+2} < 1.$$

Дробь $\frac{x-3}{x+2}$ положительна, если или $x<-2$, или $x>3$.

Неравенство

$$\frac{x-3}{x+2} < 1$$

преобразуем так:

$$1 - \frac{x-3}{x+2} > 0, \quad \text{или} \quad \frac{5}{x+2} > 0,$$

откуда

$$x > -2.$$

Таким образом, все решения данного неравенства

$$x > 3.$$

§ 3. БИОЛОГО-ПОЧВЕННЫЙ ФАКУЛЬТЕТ

ВАРИАНТЫ ПИСЬМЕННЫХ ЭКЗАМЕНОВ

(дневное отделение)

Вариант 1

1. Поле площадью 980 *га* обработано тремя бригадами, работавшими последовательно одна за другой, причем каждая из них затратила на работу свое число дней. Первая бригада обработала 70 *га*, вторая 280 *га*, а третья — остальную часть поля.

Если бы первая бригада работала столько дней, сколько затратила на работу вторая, а вторая — сколько затратила первая, то они обработали бы одинаковую площадь. Если бы вторая бригада работала столько дней, сколько затратила третья, а третья — сколько затратила вторая, то они также обработали бы одинаковую площадь. Сколько дней затратила на работу каждая бригада, если известно, что три бригады, работая одновременно, могут обработать все поле за 14 дней.

2. Вокруг круга радиуса 1 описаны квадрат и равносторонний треугольник, причем одна из сторон квадрата лежит на стороне треугольника. Вычислить площадь общей части треугольника и квадрата.

3. Найти все решения уравнения

$$\cos^2 x + \cos^2 \frac{3x}{4} + \cos^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{4} = 2.$$

4. Найти все решения уравнения

$$\sqrt{1 + \log_2 x} + \sqrt{4 \log_4 x - 2} = 4.$$

Вариант 2

5. Два туриста вышли одновременно из пунктов A и B навстречу друг другу. Они шли каждый со своей постоянной скоростью и встретились в 4 *км* от пункта B. Достигнув соответственно пунктов A и B, туристы немедленно повернули обратно и встретились в 2 *км* от пункта A. Вторая встреча произошла через 2 *час* после первой. Найти скорости движения туристов и расстояние между пунктами A и B.

6. Заданы два равносторонних треугольника, каждый площадью 1; второй получается из первого поворотом на угол 30° около его центра. Вычислить площадь общей части этих треугольников.

7. Найти все решения уравнения

$$2(\sin x + \cos x)^2 = \operatorname{tg}(45^\circ + x).$$

8. Найти все решения уравнения

$$\sqrt{[\log_9 (9x^3)] \log_3 (9x)} = \log_3 x^2.$$

Вариант 3

9. Из пункта A в направлении к пункту C выезжает автомашина. Одновременно с ней из пункта B, лежащего между A и C, также в направлении к пункту C выезжает автобус. Автомашина через 12 *мин* достигает пункта B, и, продолжая движение, догоняет автобус на расстоянии 50 *км* от пункта A. Если бы скорость автобуса была увеличена на 20 *км/час*, то автомашина догнала бы его

на расстоянии 100 *км* от пункта *A*. Определить скорость автомашины.

10. В круг радиуса 1 вписаны равносторонний треугольник и квадрат, имеющие общую вершину. Вычислить площадь общей части треугольника и квадрата.

11. Найти все решения уравнения

$$\sin^2 x - \sin^2 2x + \sin^2 3x = -\frac{1}{2}.$$

12. Найти все решения уравнения

$$2\log_2 \log_2 x + \log_{\frac{1}{2}} \log_2 (2\sqrt{2}x) = 1.$$

Вариант 4

13. Три насоса, которые выкачивают из реки воду для поливки, начали работать одновременно. Первый и третий насосы закончили работу одновременно, а второй — через 2 *час* после начала работы. В результате первый насос выкачал 9 $м^3$ воды, а второй и третий — в сумме 28 $м^3$. Какое количество воды выкачивает за час каждый насос, если известно, что третий насос за час выкачивает на 3 $м^3$ больше, чем первый, и что три насоса, работая вместе, выкачивают за час 14 $м^3$?

14. Вычислить площадь общей части двух ромбов, из которых у первого диагонали равны 2 и 3, а второй получается поворотом первого на 90° около его центра.

15. Найти все решения уравнения

$$\cos 3x \cos 4x + \sin 2x \sin 5x = \frac{1}{2}(\cos 2x + \cos 4x).$$

16. Найти все решения уравнения

$$\sqrt{2\left[\log_2\left(\frac{x^2}{64}\right) - 1\right][2 + \log_4 (8x)]} = \log_2 (2x).$$

Вариант 5

17. Из пункта *A* в пункт *B* против течения реки на лодке отправилась группа туристов, которая проплыла это расстояние за 6 *час*. Обратно часть группы возвращалась на лодке, а часть на плоту. Лодка прибыла в пункт *A* на 4 *час* раньше, чем плот. Сколько часов плыла лодка из пункта *B* в пункт *A*?

Примечание. Скорость плота относительно берега считается равной скорости течения.

18. Три окружности расположены на плоскости так, что каждая из них касается двух других внешним образом. Две из них имеют радиус 3, а третья — радиус 1. Найти площадь треугольника *ABC*,

где A, B и C — соответствующие точки касания трех окружностей.

19. Найти все решения уравнения

$$2\sin x\cos 2x+\sin 2x\cos x=\sin 4x\cos x.$$

20. Найти все решения уравнения

$$\log_{\frac{1}{2}}(x-1)+\log_{\frac{1}{2}}(x+1)-\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(7-x)=1.$$

Решение варианта 1

1. Пусть в первый раз первая бригада затратила на работу x дней, вторая бригада y дней, третья бригада z дней. Тогда $\frac{70}{x}$ *га* обработала первая бригада в 1 день, $\frac{280}{y}$ *га* обработала вторая бригада в 1 день, $\frac{630}{z}$ *га* обработала третья бригада в 1 день.

Если бы первая бригада работала столько дней, сколько затратила на работу вторая, т. е. y дней, то она обработала бы $\frac{70}{x}y$ *га*. Если бы вторая бригада работала столько дней, сколько первая, т. е. x дней, то она обработала бы $\frac{280}{y}x$ *га*.

По условию задачи

$$\frac{70}{x}y=\frac{280}{y}x. \tag{1}$$

Если же вторая бригада работала бы столько дней, сколько затратила третья, т. е. z дней, а третья — сколько затратила вторая, т. е. y дней, то они также обработали бы одинаковую площадь. Таким образом, получаем второе уравнение

$$\frac{280}{y}z=\frac{630}{z}y. \tag{2}$$

Если бы все три бригады работали вместе, то за один день они обработали бы

$$\frac{70}{x}+\frac{280}{y}+\frac{630}{z}\ га,$$

а за 14 дней они обработали все поле.

Имеем третье уравнение:

$$14\left(\frac{70}{x}+\frac{280}{y}+\frac{630}{z}\right)=980. \tag{3}$$

После упрощения система уравнений (1), (2), (3) имеет вид

$$y^2 = 4x^2,$$

$$4z^2 = 9y^2,$$

$$\frac{1}{x} + \frac{4}{y} + \frac{9}{z} = 1.$$

Так как x, y и z положительны, то эта система уравнений эквивалентна следующей:

$$y = 2x,$$

$$2z = 3y,$$

$$\frac{1}{x} + \frac{4}{y} + \frac{9}{z} = 1.$$

Решая систему, получим $x=6$, $y=12$, $z=18$.

2. Пусть S — окружность радиуса 1; ABC и EDD_1K — соответственно равносторонний треугольник и квадрат, описанные вокруг окружности S, причем сторона EK квадрата лежит на стороне AC треугольника (рис. 3).

По условию задачи необходимо вычислить площадь общей части треугольника ABC и квадрата EDD_1K, т. е. площадь шестиугольника $EMFF_1M_1K$ (M и M_1 — точки пересечения прямых AB и BC со сторонами DE и D_1K, а F и F_1 — точки пересечения прямой DD_1 с прямыми AB и BC). Эту площадь можно определить как разность площади квадрата и площадей треугольников MDF и $M_1D_1F_1$.

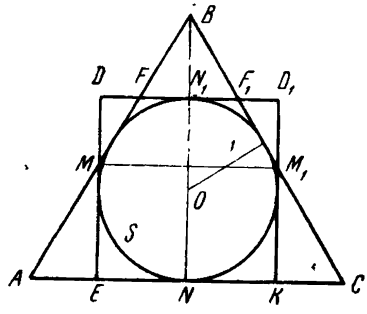

Рис. 3

Так как треугольник ABC правильный, то его высота BN есть ось симметрии, проходящая через центр O круга S.

Так как сторона EK квадрата EDD_1K, описанного вокруг окружности S, лежит на стороне AC треугольника и касается этой окружности в точке N, то прямая BN является осью симметрии и квадрата EDD_1K.

Из доказанного следует, что треугольники MDF и $M_1D_1F_1$ также симметричны относительно прямой BN и потому равны.

Для определения площади треугольника MFD вычислим его катеты DF и DM. Предварительно заметим, что $BN_1 = ON_1 = 1$.

Из треугольника FBN_1 находим

$$FN_1 = BN_1 \cdot \operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

и, следовательно,

$$DF = DN_1 - FN_1 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{3-\sqrt{3}}{3}.$$

Из треугольника MDF находим

$$DM = DF \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{3-\sqrt{3}}{3}\sqrt{3}.$$

Таким образом, площадь прямоугольного треугольника MDF равна

$$\frac{1}{2} DF \cdot DM = \frac{3-\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{3-\sqrt{3}}{3}\sqrt{3} = \frac{2\sqrt{3}-3}{3}.$$

Но так как площадь квадрата EDD_1K равна 4, то площадь общей части треугольника ABC и квадрата EDD_1K равна

$$4 - 2\frac{2\sqrt{3}-6}{3} = 6 - \frac{3}{\sqrt{3}}.$$

Заметим еще, что площадь общей части правильного треугольника ABC и квадрата EDD_1K можно определить как сумму площадей прямоугольника EMM_1K и трапеции MFF_1M_1.

3. Преобразуем данное уравнение следующим образом:

$$\frac{1+\cos 2x}{2} + \frac{1+\cos\frac{3x}{2}}{2} + \frac{1+\cos x}{2} + \frac{1+\cos\frac{x}{2}}{2} = 2,$$

или

$$\cos 2x + \cos\frac{3x}{2} + \cos x + \cos\frac{x}{2} = 0.$$

Группируя первый член со вторым, а третий с четвертым, получим

$$2\cos\frac{7x}{4}\cos\frac{x}{4} + 2\cos\frac{3x}{4}\cos\frac{x}{4} = 0,$$

или

$$\cos\frac{x}{4}\left(\cos\frac{7x}{4} + \cos\frac{3x}{4}\right) = 0,$$

или

$$\cos\frac{x}{4}\cos\frac{5x}{4}\cos\frac{x}{2} = 0.$$

Решениями уравнений $\cos\frac{x}{4}=0$, $\cos\frac{5x}{4}=0$, $\cos\frac{x}{2}=0$, а следовательно и всеми решениями данного уравнения, будут

$$x=2\pi(2k+1),\quad x=\frac{2\pi}{5}(2k+1),\quad x=\pi(2k+1),$$

где k принимает все целые значения.

4. Так как $\log_4 x=\log_2 x\cdot\log_4 2=\frac{1}{2}\log_2 x$, то данное уравнение можно переписать в виде

$$\sqrt{1+\log_2 x}+\sqrt{2\log_2 x-2}=4.$$

Возводя в квадрат обе части этого уравнения, получим

$$3\log_2 x-1+2\sqrt{2\log_2^2 x-2}=16,$$

или

$$2\sqrt{2\log_2^2 x-2}=17-3\log_2 x.$$

Возводя в квадрат обе части этого уравнения, имеем

$$4(2\log_2^2 x-2)=289-102\log_2 x+9\log_2^2 x,$$

или

$$\log_2^2 x-102\log_a x+297=0.$$

Корни этого уравнения:

$$\log_2 x=3 \text{ и } \log_2 x=99,$$

откуда

$$x=8,\ x=2^{99}.$$

Среди этих значений x находятся *все* корни данного уравнения (так как если какое-то число $x=x_0$ является корнем уравнения $A=B$, то оно является и корнем уравнения $A^2=B^2$, но не наоборот!). Поэтому числа $x=8$ и $x=2^{99}$ (одно или даже оба!) могут и не быть корнями данного уравнения. Подставляя в левую часть данного уравнения 8 вместо x, получим

$$\sqrt{1+\log_2 8}+\sqrt{2\log_2 8-2}=\sqrt{4}+\sqrt{4}=4,$$

так что $x=8$ — корень данного уравнения. Подставляя $x=2^{99}$, получим

$$\sqrt{1+\log_2 2^{99}}+\sqrt{2\log_2 2^{99}-2}=\sqrt{100}+\sqrt{196}=10+14=24,$$

т. е. $x=2^{99}$ — не корень данного уравнения. Таким образом, данное уравнение имеет только один корень $x=8$.

Замечание. Легко проверить, что $x=2^{99}$ — корень уравнения

$$-\sqrt{1+\log_2 x}+\sqrt{2\log_2 x-2}=4, \qquad (1)$$

однако $x=8$ — не корень уравнения (1).

При возведении в квадрат обеих частей уравнения (1), получим

$$3\log_2 x-1-2\sqrt{2\log_2^2 x-2}=16,$$

или

$$2\sqrt{2\log_2^2 x-2}=3\log_2 x-17. \qquad (2)$$

Число $x=2^{99}$ остается корнем уравнения (2), но $x=8$ — не корень. А при возведении обеих частей уравнения (2) в квадрат, получим уравнение, корни которого $x=2^{99}$ и $x=8$. Как объяснить то обстоятельство, что и в данном уравнении и в уравнении

$$-\sqrt{1+\log_2 x}+\sqrt{2\log_2 x-2}=4$$

при первом возведении в квадрат полученное уравнение оказывается эквивалентным данному, а при вторичном возведении в квадрат эквивалентность нарушается?

§ 4. ХИМИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

ВАРИАНТЫ ПИСЬМЕННЫХ ЭКЗАМЕНОВ

(дневное отделение)

Вариант 1

1. Два одинаковых сосуда наполнены спиртом. Из первого сосуда отлили a литров спирта и налили в него столько же литров воды. Затем из полученной смеси воды со спиртом отлили a литров и налили столько же литров воды. Из второго сосуда отлили $2a$ литров спирта и налили в него столько же литров воды. Затем из полученной смеси воды со спиртом отлили $2a$ литров и налили столько же литров воды. Определить, какую часть объема сосуда составляют a литров, если крепость окончательной смеси в первом сосуде в $^{25}/_{16}$ раза больше крепости окончательной смеси во втором сосуде.

2. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a, а высота, опущенная из какой-нибудь вершины основания на противоположную ей боковую грань, равна b. Определить объем пирамиды.

3. Решить уравнение

$$\sin\left(2x-\frac{\pi}{12}\right)+\cos\left(2x-\frac{\pi}{12}\right)=\sqrt{2}\cos\left(3x+\frac{\pi}{6}\right).$$

4. Решить неравенство

$$2\log_2(x-1)-\log_2(2x-4)>1.$$

Вариант 2

5. Три бригады, работая одновременно, обычно выполняют норму по изготовлению деталей за несколько часов. Если бы первые две бригады работали в два раза медленнее обычного, а третья бригада — в 4 раза быстрее, то норма была бы выполнена за то же время. Известно, что первая и вторая бригады при совместной работе выполняют эту же норму в два раза быстрее, чем вторая бригада совместно с третьей. Во сколько раз первая бригада за один час делает деталей больше, чем третья?

6. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна h, а плоские углы при вершине равны φ. Определить объем пирамиды.

7. Решить уравнение

$$\operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=2\sin 2x.$$

8. Решить неравенство

$$\frac{1}{2^x+3}>\frac{1}{2^{x+2}-1}.$$

Вариант 3

9. Из двух жидкостей, удельные веса которых 2 *г/см*^{3} и 3 *г/см*^{3}, составлена смесь. Сколько граммов взято каждой жидкости и каков удельный вес смеси, если 4 *см*^{3} смеси весят в 10 раз меньше, чем вся первая жидкость, а 50 *см*^{3} смеси весят столько же, сколько вся вторая жидкость, входящая в ту же смесь? Предполагается, что объем смеси равен сумме объемов ее составных частей.

10. Дана прямая призма, у которой основанием служит правильный треугольник. Через одну из сторон нижнего основания и противоположную вершину верхнего основания проведена плоскость. Угол между этой плоскостью и основанием призмы равен α, а площадь сечения призмы равна S. Определить объем призмы.

11. Решить уравнение

$$\sin\left(2x+\frac{5\pi}{2}\right)-3\cos\left(\frac{7\pi}{2}-x\right)=1+2\sin x.$$

12. Решить неравенство

$$\log_2(x^2-3x)\leqslant 2.$$

Вариант 4

13. Даны три вещества с различными удельными весами. Из них составлены три смеси: первая — из равных объемов второго и третьего веществ, вторая — из равных объемов первого и третьего веществ и третья — из равных объемов первого и второго веществ. Удельные веса этих смесей находятся в отношении 7 : 6 : 3. Определить, во сколько раз удельный вес третьего вещества больше удельного веса второго.

Объем смеси предполагается равным сумме объемов ее составных частей.

14. Определить объем параллелепипеда, у которого все ребра равны 1, а все плоские углы при одной из вершин равны $\varphi < 90°$.

15. Решить уравнение

$$\operatorname{tg}\frac{3\pi - 4x}{2} - \cos 2x = 2\sqrt{3}\cos^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

16. Решить неравенство

$$\frac{1}{\log_2 x} \leqslant \frac{1}{\log_2 \sqrt{x+2}}.$$

Вариант 5

17. Два брата ходят вместе в школу из дома с постоянной и одинаковой для обоих скоростью. Однажды через 15 *мин* после того, как они вышли из дома, первый побежал домой, и, добежав до дома, немедленно бросился догонять второго. Пока первый брат отсутствовал, второй, уменьшив скорость ходьбы в два раза, продолжал идти в школу. После того как первый брат догнал второго, они пошли с первоначальной скоростью и пришли в школу на 6 *мин* позже, чем обычно. Определить, во сколько раз скорость бега первого брата, которая считается постоянной, превосходит первоначальную скорость ходьбы братьев.

18. Определить синус угла между двумя высотами, опущенными из двух вершин правильного тетраэдра на противоположные грани.

19. Решить уравнение

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 3\operatorname{ctg}\frac{2\pi - x}{4}.$$

20. Решить неравенство

$$\sqrt{1-x} \leqslant \sqrt[4]{5+x}.$$

Решение варианта 1

1. Обозначим через x первоначальное количество спирта как в первом, так и во втором сосудах (по условию задачи количество спирта в обоих сосудах было одно и то же).

После первого отливания в первом сосуде осталось $x-a$ литров спирта. После того как в сосуд добавили a литров воды, крепость спирта, т. е. отношение объема спирта в первом сосуде к объему смеси спирта с водой, стала равной $\frac{x-a}{x}$. Во второй раз из первого сосуда отлили a литров, в которых содержалось $\frac{x-a}{x}a$ литров спирта и, значит, в первом сосуде осталось

$$x-a-\frac{x-a}{x}a=\frac{(x-a)^2}{x}$$

литров спирта. Крепость смеси в первом сосуде стала равной

$$\frac{(x-a)^2}{x^2}.$$

После того как из второго сосуда отлили $2a$ литров спирта, в нем осталось $x-2a$ литров спирта, и когда второй сосуд дополнили $2a$ литрами воды, то крепость смеси оказалась равной $\frac{x-2a}{x}$.

Во второй раз из второго сосуда отлили $2a$ литров смеси, содержащей $\frac{x-2a}{x}2a$ литров спирта, и в нем осталось $x-2a-\frac{(x-2a)\,2a}{x}=$ $=\frac{(x-2a)^2}{x}$ литров спирта. Крепость смеси во втором сосуде оказалась равной $\frac{(x-2a)^2}{x^2}$.

По условию задачи

$$\frac{(x-a)^2}{x^2}:\frac{(x-2a)^2}{x^2}=\frac{25}{16}.$$

После упрощения получим уравнение

$$9x^2-68ax+84a^2=0,$$

откуда

$$x_1=6a,\ x_2=\frac{14}{9}a.$$

Так как $x_2-2a=\frac{14}{9}a-2a<0$, то $x=\frac{14}{9}a$ не является решением данной задачи.

Таким образом, $x=6a$ и, значит,

$$a:x=1:6,$$

т. е. a литров составляет $^1/_6$ объема сосуда.

2. Пусть $SABC$ — правильная треугольная пирамида, S — ее вершина; ABC — равносторонний треугольник, лежащий в основа-

нии. Проекция O вершины S пирамиды $SABC$ на плоскость ее основания совпадает с точкой пересечения высот треугольника ABC (так как проекции OA, OB, OC равных наклонных SA, SB, SC равны между собой: $OA=OB=OC$). Прямая AO пересекает сторону BC в точке E, являющейся серединой стороны BC. Значит, SE — высота равнобедренного треугольника BSC ($SE \perp BC$).

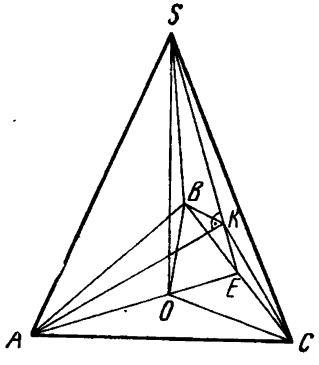

Рис. 4

Пусть K — проекция точки A на прямую SE. Так как $SE \perp BC$ и $AE \perp BC$, то прямая BC перпендикулярна плоскости треугольника AES. Но прямая AK лежит в плоскости треугольника AES, следовательно, скрещивающиеся прямые AK и BC взаимно перпендикулярны. Итак, $AK \perp SE$ и $AK \perp BC$, следовательно, прямая AK перпендикулярна плоскости BSC (рис. 4).

Объем одной и той же пирамиды можно определить при помощи формулы

$$V = \frac{1}{3} \text{ пл. } \triangle ABC \cdot h, \qquad (1)$$

где h — длина высоты SO, или при помощи формулы

$$V = \frac{1}{3} \text{ пл. } \triangle CBS \cdot b, \qquad (2)$$

где b — расстояние от вершины A до плоскости SBC, т. е. длина отрезка AK. Так как $\triangle ABC$ равносторонний, то его площадь равна $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Далее, из прямоугольного треугольника OSE находим $SE = \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{12}}$ и, следовательно,

$$\text{пл. } \triangle SBC = \frac{1}{2} a \cdot SE = \frac{1}{2} a \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{12}}.$$

Подставляя значения площадей треугольников ABC и CBS в выражения объемов (1) и (2) и приравнивая результаты, получим

$$\frac{a^2 h \sqrt{3}}{12} = \frac{ab}{6} \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{12}},$$

откуда находим

$$h = \frac{ab}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3a^2 - 4b^2}}.$$

Подставляя значение h в формулу $V=\frac{a^2\sqrt{3}}{12}h$ объема пирамиды $SABC$, получим

$$V=\frac{a^2\sqrt{3}}{12}\cdot\frac{ab}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3a^2-4b^2}}=\frac{a^3b}{12\sqrt{3a^2-4b^2}}.$$

3. Преобразуем последовательно данное уравнение:

$$\frac{\sin\left(2x-\frac{\pi}{12}\right)}{\sqrt{2}}+\frac{\cos\left(2x-\frac{\pi}{12}\right)}{\sqrt{2}}=\cos\left(3x+\frac{\pi}{6}\right),$$

$$\cos\left(2x-\frac{\pi}{12}\right)\cos\frac{\pi}{4}+\sin\left(2x-\frac{\pi}{12}\right)\sin\frac{\pi}{4}=\cos\left(3x+\frac{\pi}{6}\right),$$

$$\cos\left(2x-\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(3x+\frac{\pi}{6}\right),$$

$$\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(3x+\frac{\pi}{6}\right).$$

Все решения этого уравнения находятся из соотношений

$$3x+\frac{\pi}{6}+2x-\frac{\pi}{3}=2k\pi,$$

$$3x+\frac{\pi}{6}-2x+\frac{\pi}{3}=2k\pi,$$

откуда

$$x=\frac{\pi}{30}+\frac{2k\pi}{5},$$

$$x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi,$$

где k принимает все целые значения.

4. Решениями данного неравенства могут быть только значения x, удовлетворяющие неравенствам

$$x-1>0,\quad 2x-4>0,$$

т. е. только $x>2$. Таким образом, данное неравенство эквивалентно смешанной системе

$$\log_2\frac{(x-1)^2}{4(x-2)}>0,$$

$$x>2,$$

или

$$\frac{(x-1)^2}{4(x-2)}>1,\quad x>2$$

или

$$x^2 - 2x + 1 > 4x - 8,$$

$$x > 2,$$

или

$$(x-3)^2 > 0,$$

$$x > 2.$$

Отсюда следует, что решения последней системы, а значит и все решения данного неравенства, таковы:

$$2 < x < 3, \quad x > 3.$$

§ 5. ФИЛОЛОГИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

ВАРИАНТЫ ПИСЬМЕННЫХ ЭКЗАМЕНОВ

(дневное отделение)

Вариант 1

1. Две машинистки должны перепечатать рукопись, состоящую из трех глав, первая из которых вдвое короче второй и втрое длиннее третьей. Работая вместе, машинистки перепечатали первую главу за 3 *час* 36 *мин*. Вторая глава была перепечатана за 8 *час*, из которых 2 *час* работала только первая машинистка, а остальное время они работали вместе. Какое время потребуется второй машинистке, чтобы перепечатать третью главу?

2. Решить уравнение

$$3(\log_2 \sin x)^2 + \log_2(1 - \cos 2x) = 2.$$

3. Найти площадь треугольника ABC, если $\angle ACB = 30°$, $AC = BC$ и периметр треугольника равен 5.

4. При каких значениях y верно следующее утверждение: «существует хотя бы одно значение x, при котором неравенство

$$2\log_{0,5} y^2 - 3 + 2x\log_{0,5} y^2 - x^2 > 0$$

выполняется»?

Вариант 2

5. Поступающие сдавали четыре экзамена. 20% из общего числа подавших заявления получили «неудовлетворительно» на первом экзамене. 90% выдержавших первый экзамен сдали также и второй. На третьем экзамене отсеялась $^1/_{18}$ часть оставшихся по-

сле второго экзамена, да еще 5 человек. Наконец, $^8/_9$ от числа выдержавших третий экзамен получили положительные оценки и на четвертом. В результате оказалось, что число сдавших все экзамены вдвое больше числа мест, а число мест в полтора раза больше, чем число получивших «неудовлетворительно» на первом экзамене. Сколько заявлений было подано?

6. Решить уравнение

$$1 + 2^{\operatorname{tg} x} = 3 \cdot 4^{\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{\sqrt{2}\cos x}}.$$

7. Точка M лежит внутри равностороннего треугольника ABC. Вычислить площадь этого треугольника, если известно, что

$$AM = BM = 2, \quad CM = 1.$$

8. При каких значениях y верно следующее утверждение: «при любом x неравенство

$$x^2\left(2 - \log_2 \frac{y}{y+1}\right) + 2x\left(1 + \log_2 \frac{y}{y+1}\right) - 2\left(1 + \log_2 \frac{y}{y+1}\right) > 0$$

выполняется»?

Вариант 3

9. Для того чтобы из пункта A попасть в пункт B, нужно часть пути от пункта A до пункта C проехать на поезде, а остальные 15 *км* от C до B — на автобусе. Вся поездка от A до B занимает 1 *час* 15 *мин*, причем автобус отправляется сразу после прихода поезда, а временем, которое поезд и автобус тратят на остановки, можно пренебречь. По ошибке пассажир сошел с поезда на остановку раньше, прошел оставшийся путь до C длиной 5 *км* пешком со скоростью 4 *км/час*, а затем еще 20 *мин* ждал автобуса и в результате попал в пункт B на 1 *час* 30 *мин* позже намеченного срока. Найти расстояние от A до C, если известно, что скорость поезда вдвое больше скорости автобуса.

10. Решить уравнение

$$(0{,}5)^{\cos 2x} - \frac{1}{4^{\sin^2 x}} = \frac{1}{2}.$$

11. Определить длину перпендикуляра EH, восставленного из точки E к стороне AB треугольника ABC, где H — точка пересечения данного перпендикуляра с одним из отрезков AC или CB, зная длины сторон $AB = 4$, $AC = 5$, $BC = \sqrt{17}$ и зная, что данный перпендикуляр делит треугольник на две фигуры равной площади.

12. Решить неравенство

$$\log_x \frac{4x+5}{6-5x} < -1.$$

Вариант 4

13. Расстояние между пунктами A и C равно 30 *км*. Из пункта A по направлению к C вышел лыжник, двигающийся со скоростью 10 *км/час*. Через 15 *мин* навстречу ему из пункта C должен был выйти другой лыжник с тем, чтобы, двигаясь с постоянной скоростью, встретиться с первым на середине пути. Однако второй лыжник вышел с опозданием на 55 *мин*, вследствие чего встреча произошла в другом пункте B. Чему равно расстояние от A до B?

14. Решить уравнение

$$\frac{1}{2}+16^{\sin x}=\frac{6}{16^{\cos^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}}.$$

15. В треугольник ABC вписан квадрат таким образом, что одна из его сторон лежит на стороне AB треугольника ABC. Найти сторону этого квадрата, если $AB=AC=8$, а $BC=8\sqrt{\frac{2}{5}}$.

16. Решить неравенство

$$\log_2(x-1)-\log_2(x+1)+\log_{\frac{x+1}{x-1}}2>0.$$

Решение варианта 1

1. Пусть третья глава рукописи содержит x страниц, тогда первая содержит $3x$, а вторая $6x$ страниц. Пусть первая машинистка печатает за 1 *час* y страниц, а вторая z страниц. Работая вместе 3 *час* 36 *мин*, машинистки перепечатали первую главу, следовательно,

$$\frac{18}{5}(z+y)=3x. \qquad (1)$$

Вторая глава была перепечатана за 8 *час*, из которых 2 *час* работала только первая машинистка, а 6 *час* они работали вместе, т. е.

$$2y+6(y+z)=6x. \qquad (2)$$

Пусть одна вторая машинистка перепечатывает третью главу за t *час*, тогда

$$tz=x.$$

Подставляя tz вместо x в уравнения (1) и (2), получим

$$6z+6y=5tz,$$

$$3z+4y=3tz.$$

Умножая первое из этих уравнений на 2, а второе на —3 и складывая полученные при этом уравнения, будем иметь $3z=tz$, откуда $t=3$.

Итак, вторая машинистка перепечатает третью главу за 3 *час.*

2. Корнями данного уравнения могут быть только такие числа x, для которых $\sin x>0$. Поэтому данное уравнение

$$3(\log_2 \sin x)^2 + \log_2(1-\cos 2x) = 2, \qquad (1)$$

или

$$3(\log_2 \sin x)^2 + \log_2(2\sin^2 x) - 2 = 0,$$

или

$$3(\log_2 \sin x)^2 + 1 + 2\log_2|\sin x| - 2 = 0,$$

равносильно следующему:

$$3(\log_2 \sin x)^2 + 2\log_2 \sin x - 1 = 0.$$

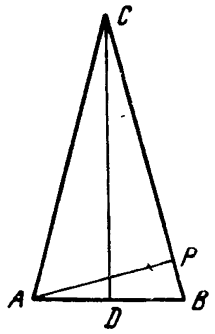

Рис. 5

Обозначая $\log_2\sin x$ через y и замечая, что в силу условия $\sin x>0$ величина y может принимать все значения, меньшие или равные нулю, заключаем, что данное уравнение перепишется так:

$$3y^2 + 2y - 1 = 0. \qquad (2)$$

Уравнение $3y^2+2y-1=0$ имеет действительные корни разных знаков $\frac{1}{3}$ и -1. Но так как $y\leqslant 0$, то $\log_2\sin x=-1$, $\sin x=\frac{1}{2}$ и $x=k\pi+(-1)^k\frac{\pi}{6}$, где k принимает все целые значения.

3. Так как угол ACB равен 30°, то расстояние AP от вершины A треугольника ABC до стороны BC в два раза меньше боковой стороны AC треугольника ABC. Поэтому площадь S треугольника ABC равна $\frac{1}{2}AP\cdot BC=\frac{1}{4}AC^2$ (рис. 5). Для нахождения AC воспользуемся тем, что периметр треугольника равен 5:

$$5 = AC + BC + AB = 2AC + 2AD = 2AC(1+\sin 15°).$$

Отсюда $AC=\frac{5}{2(1+\sin 15°)}$ и так как

$$\sin 15° = \sqrt{\frac{1-\cos 30°}{2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}},$$

то* $AC=\frac{5}{2+\sqrt{2-\sqrt{3}}}$, а $S=\frac{25}{4\left(2+\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2}$.

* Можно иначе: $\sin 15°=\sin(45°-30°)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ и т. д. Ответ при этом не упрощается, но и не содержит двойных радикалов.

4. Перепишем данное неравенство так:

$$f(x) = x^2 - 2x \log_{0,5} y^2 + 3 - 2\log_{0,5} y^2 < 0. \qquad (1)$$

Заметим, что функция $y=x^2+px+q$, где p и q — действительные числа, отрицательна хотя бы при одном значении x; тогда и только тогда, когда корни уравнения $y=0$ действительны и различны, т. е. тогда и только тогда, когда $p^2-4q>0$.

Применяя это соображение, заключаем, что функция $f(x)$, заданная соотношением (1), будет отрицательна хотя бы при одном значении x тогда и только тогда, когда выполняется неравенство

$$(\log_{0,5} y^2)^2 - 3 + 2\log_{0,5} y^2 > 0.$$

Перепишем это неравенство так:

$$(\log_{0,5} y^2 - 1)(\log_{0,5} y^2 + 3) > 0,$$

откуда либо $\log_{0,5} y^2 > 1$, либо $\log_{0,5} y^2 < -3$.
Неравенство

$$\log_{0,5} y^2 > 1$$

выполняется тогда и только тогда, когда $y \neq 0$ и $y^2 < 0{,}5$, т. е. или $-\sqrt{0{,}5} < y < 0$, или $0 < y < \sqrt{0{,}5}$.

Неравенство $\log_{0,5} y^2 < -3$ будет выполнено тогда и только тогда, когда $y^2 > 8$, т. е. если или $y < -2\sqrt{2}$, или $y > 2\sqrt{2}$.

Итак, неравенство (1) выполняется хотя бы при одном значении x тогда и только тогда, когда y принадлежит одному из следующих интервалов:

$$y < -2\sqrt{2};\ -\frac{1}{\sqrt{2}} < y < 0;\ 0 < y < \frac{1}{\sqrt{2}};\ y > 2\sqrt{2}.$$

§ 6. ЭКОНОМИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

ВАРИАНТЫ ПИСЬМЕННЫХ ЭКЗАМЕНОВ

(дневное отделение)

Вариант 1

1. Плоты шли из пункта A до устья реки вниз по течению. В устье реки их взял на буксир пароход и через $11\frac{1}{2}$ суток после выхода плотов из пункта A доставил по озеру в пункт B. Сколько времени пароход вел плоты от устья реки по озеру до B, если известно, что пароход тратит на рейс (без буксировки) от A до B 40 *час* и от B до A 48 *час*, а скорость во время буксировки уменьшается вдвое?

2. Решить неравенство

$$\log_a \left| \frac{x-1}{2x+1} \right| < 0.$$

3. Решить уравнение

$$(\cos 2x - \cos^4 x) \operatorname{ctg} 3x + \frac{\sin 5x - \sin x}{8 \sin 3x} = 0.$$

4. Многочлен

$$2x^3 + ax^2 + bx + c$$

имеет два корня, равных -3, и один корень, равный 2. Найти a, b, c.

5. В точке M, находящейся на расстоянии $2h$ от плоскости основания куба с ребром h и на расстоянии $R > 3h$ от центра куба, помещен источник света. Доказать, что тень, отбрасываемая кубом на плоскость основания, будет иметь наибольшую площадь, когда плоскость, проходящая через центр куба, точку M и одну из вершин, перпендикулярна плоскости основания.

Вариант 2

6. От двух однородных кусков сплава с различным процентным содержанием меди, весящих соответственно m и n *кг*, отрезано по куску равного веса. Каждый из отрезанных кусков сплавили с остатком другого куска, после чего процентное содержание меди в получившихся сплавах стало одинаковым. Сколько весил каждый из отрезанных кусков?

7. Решить неравенство

$$\sqrt{\log_a \frac{3-2x}{1-x}} < 1.$$

8. Решить уравнение

$$\cos^2 3x - \operatorname{tg}^2 3x - \sin^2 3x + 1 = 0.$$

9. Найти все действительные значения p и q, при которых $x^4 + 1$ делится на $x^2 + px + q$.

10. Дана правильная треугольная пирамида с центром основания O и плоскостью основания P. В точке A, находящейся на расстоянии h от плоскости P и на расстоянии l от точки O, помещен источник света. Доказать, что тень, отбрасываемая пирамидой на плоскость P, будет иметь наименьшую площадь, когда точка A лежит в плоскости одной из боковых граней пирамиды.

Вариант 3

11. Из полного бака, содержащего 729 *л* кислоты, отлили a литров и долили бак водой. После тщательного перемешивания отлили a литров раствора и снова долили бак водой. После того как такая процедура была повторена шесть раз, раствор в баке содержал 64 *л* кислоты. Определить величину a.

12. Найти положительные решения неравенства

$$x^{\frac{2x-1}{3-x}} > 1.$$

13. Решить уравнение

$$(1 + \operatorname{cosec}^2 x) \sin 2x \cos 2x \operatorname{tg} 3x = 0.$$

14. Многочлен $x^4+x^3-x^2+ax+b$ имеет два одинаковых корня, равных 1. Найти a и b.

15. Ребра треугольной пирамиды, выходящие из вершины O, попарно перпендикулярны, и их длины равны a, b и c. Найти объем куба, вписанного в эту пирамиду так, что одна из его вершин совпадает с вершиной O.

Вариант 4

16. Один сплав содержит медь и олово в отношении 2 : 1, а другой — в отношении 3 : 2. По скольку частей нужно взять каждого из этих сплавов, чтобы получить третий сплав, в котором медь и олово содержатся в отношении 27 : 17?

17. Решить неравенство

$$\log_a^4 x - 2\log_a^2 x - 3 < 0.$$

18. Решить уравнение

$$(1 + \sec^2 x) \sin 2x \cos 2x \operatorname{ctg} 3x = 0.$$

19. Найти целые решения уравнения

$$(1 - i)^x = 2^x$$

(комплексное число в нулевой степени считается равным 1).

20. В конус вписаны 4 шара радиуса r так, что каждый из них касается конуса и трех других. Найти радиус основания конуса.

Решение варианта 1

1. Пусть скорость буксира v *км/час*, а скорость реки u *км/час*. Пусть расстояние от пункта A до устья реки равно s_1 *км*, а расстояние от устья реки до пункта B по озеру равно s_2 *км*. От пункта A до устья реки плоты шли $\frac{s_1}{u}$ *час*, а от устья реки до пункта B пароход доставил их за $\frac{s_2}{\frac{v}{2}}$ *час*. Всего же путь из A в B продолжался $11\frac{1}{2}$ суток, т. е. 276 *час*, поэтому

$$\frac{s_1}{u} + \frac{2s_2}{v} = 276. \qquad (1)$$

На путь от пункта A до устья реки пароход тратит $\frac{s_1}{u+v}$ *час*, а от устья реки пункта B до $\frac{s_2}{v}$ *час*, поэтому

$$\frac{s_1}{u+v}+\frac{s_2}{v}=40. \tag{2}$$

Аналогично составляется уравнение

$$\frac{s_2}{v}+\frac{s_1}{v-u}=48. \tag{3}$$

Из системы уравнений (1), (2), (3) надо найти отношение $\frac{2s_2}{v}$. Из уравнений (2) и (3) находим

$$s_1\left(\frac{1}{v-u}-\frac{1}{v+u}\right)=8,$$

откуда

$$s_1=\frac{4(v^2-u^2)}{u}. \tag{4}$$

Складывая почленно уравнения (2) и (3), получим

$$\frac{2s_2}{v}+\frac{2vs_1}{v^2-u^2}=88,$$

или в силу соотношения (4)

$$\frac{2s_2}{v}=88-\frac{2v}{v^2-u^2}s_1=88-\frac{8v}{u}. \tag{5}$$

Подставляя в уравнение (1) вместо s_1 и $\frac{2s_2}{v}$ их выражения из формул (4) и (5), получим

$$4\frac{v^2-u^2}{u^2}+88-\frac{8v}{u}=276,$$

или

$$\frac{v^2}{u^2}-2\frac{v}{u}-48=0.$$

Положительный корень этого уравнения

$$\frac{u}{v}=8,$$

следовательно,

$$\frac{2s_2}{v}=88-8\cdot 8=24.$$

2. Функция

$$\log_a \left| \frac{x-1}{2x+1} \right|$$

определена при всех действительных значениях a и x, таких, что $a>0$, $a\neq 1$, $x\neq 1$, $x\neq -\frac{1}{2}$.

I. Случай $a>1$. В этом случае неравенство

$$\log_a \left| \frac{x-1}{2x+1} \right| < 0$$

эквивалентно такому:

$$\left| \frac{x-1}{2x+1} \right| < 1,$$

или

$$|x-1| < |2x+1|. \qquad (1)$$

Корни функций $2x+1$ и $x-1$ соответственно равны $-\frac{1}{2}$ и 1, поэтому естественно рассмотреть случаи

$$1^\circ.\ x < -\frac{1}{2};\quad 2^\circ.\ -\frac{1}{2} < x < 1;\quad 3^\circ.\ x > 1.$$

1°. В случае $x<-\frac{1}{2}$ неравенство (1) эквивалентно неравенству

$$-x+1 < -2x-1,$$

или

$$x < -2.$$

2°. В случае $-\frac{1}{2} < x < 1$ неравенство (1) эквивалентно неравенству

$$-x+1 < 2x+1,$$

или

$$0 < x.$$

Учитывая условия случая, получаем, что исходное неравенство справедливо для x из промежутка $0<x<1$.

3°. В случае $x>1$ неравенство (1) эквивалентно неравенству

$$x-1<2x+1,$$

или

$$x>-2.$$

Решение же исходного неравенства $x>1$.

Итак, в случае $a>1$ все решения данного неравенства $x<-2$, $0<x<1$ и $x>1$.

II. Случай $0<a<1$. В этом случае неравенство

$$\log_a\left|\frac{x-1}{2x+1}\right|<0$$

эквивалентно неравенству

$$\left|\frac{x-1}{2x+1}\right|>1,$$

или

$$|x-1|>|2x+1|. \qquad (2)$$

1°. Если $x<-\frac{1}{2}$, то неравенство (2) эквивалентно неравенству

$$-x+1>-2x-1;$$

или

$$-2<x.$$

Решением исходного неравенства будут все x из промежутка $-2<x<-\frac{1}{2}$.

2°. Если $-\frac{1}{2}<x<1$, то неравенство (2) эквивалентно неравенству

$$-x+1>2x+1,$$

или

$$x<0.$$

В этом случае решение исходного неравенства $-\frac{1}{2}<x<0$.

3°. Если, наконец, $x>1$, то неравенство (2) эквивалентно неравенству

$$x-1>2x+1,$$

откуда $x<-2$. В случае 3° исходное неравенство не имеет решений, так как эта система неравенств $x>1$ и $x<-2$ несовместна.

Итак, в случае $0<a<1$ все решения данного неравенства

$$-2<x<-\frac{1}{2},\quad -\frac{1}{2}<x<0,$$

или все значения x из интервала $(-2, 0)$, кроме $x=-\frac{1}{2}$.

Замечание. Неравенства

$$|x-1|<|2x+1| \quad \text{и} \quad |x-1|>|2x+1|$$

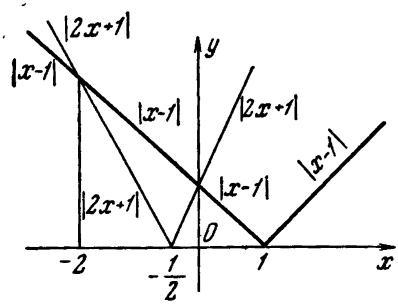

Рис. 6

хорошо интерпретируются геометрически (рис. 6), если, конечно, считать, что x — действительное число (это и предполагается в данной задаче). Из рис. 6 видно, что если $x<-2$, то $|2x+1|>|x-1|$, если $-2<x<0$, то $|2x+1|<|x-1|$, а если $x>0$, то $|2x+1|>|x-1|$.

3. Произведем над данным уравнением следующие эквивалентные преобразования:

$$[1-2\sin^2 x-(1-\sin^2 x)^2]\frac{\cos 3x}{\sin 3x}+\frac{2\sin 2x\cos 3x}{8\sin 3x}=0,$$

$$-\frac{\sin^4 x\cos 3x}{\sin 3x}+\frac{4\sin x\cos x\cos 3x}{8\sin 3x}=0,$$

$$\frac{\sin x\cos 3x(\cos x-2\sin^3 x)}{8\sin 3x}=0. \qquad (1)$$

Корни уравнения $\sin x=0$ не являются корнями данного уравнения, так как если $\sin x=0$, то и $\sin 3x=0$.

Корни уравнения $\cos 3x=0$, т. е.

$$x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3},$$

где k принимает все целые значения, являются корнями данного уравнения, так как если $\cos 3x=0$, то $\sin 3x=\pm 1$, и знаменатель уравнения (1) в нуль не обращается.

Пусть, наконец,

$$\cos x-2\sin^3 x=0.$$

Имеем

$$\cos x - \sin x + \sin x - 2\sin^3 x = 0,$$

$$\cos x - \sin x + \sin x(1 - 2\sin^2 x) = 0,$$

$$\cos x - \sin x + \sin x \cdot \cos 2x = 0,$$

$$\cos x - \sin x + \sin x(\cos^2 x - \sin^2 x) = 0,$$

$$(\cos x - \sin x)(1 + \sin x \cos x + \sin^2 x) = 0.$$

Отсюда

$$\cos x - \sin x = 0,$$

т. е.

$$\operatorname{tg} x = 1,\ x = k\pi + \frac{\pi}{4},$$

где k принимает все целые значения. Все эти значения x — корни данного уравнения, так как

$$\sin 3x = \sin\left(3k\pi + \frac{3\pi}{4}\right) \neq 0.$$

Остается решить уравнение

$$1 + \sin x \cos x + \sin^2 x = 0.$$

Переписывая его в виде

$$\left(\sin x + \frac{\cos x}{2}\right)^2 + 1 - \frac{\cos^2 x}{4} = 0,$$

заключаем, что оно не имеет решений.

Итак, все решения данного уравнения:

$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3},\ x = k\pi + \frac{\pi}{4},$$

где k принимает все целые значения.

4. Пусть $x_1 = -3$, $x_2 = -3$ и $x_3 = 2$ — корни данного многочлена. Тогда

$$2x^3 + ax^2 + bx + c = 2(x + 3)(x + 3)(x - 2),$$

или

$$2x^3 + ax^2 + bx + c = 2x^3 + 8x^2 - 6x - 36.$$

Так как это тождество относительно x, то

$$a = 8,\quad b = -6,\quad c = -36.$$

Эту задачу можно решить иначе: так как $x_1 = 2$ — корень данного многочлена, то $16 + 4a + 2b + c = 0$. Так как $x_2 = -3$ — корень дан-

ного многочлена, то $-54+9a-3b+c=0$. Затем перепишем данный многочлен так:

$$2x^3+ax^2+bx+c=(x+3)[2x^2+(a-6)x+b-3a+18]+$$
$$+-54+9a-3b+c.$$

Так как $-54+9a-3b+c=0$, то $2x^3+ax^2+bx+c=(x+3)[2x^2+(a-6)x+b-3a+18]$.

Поскольку данный многочлен имеет два корня, равных -3, то $x_3=-3$ есть корень многочлена $2x^2+(a-6)x+b-3a+18$, т. е. справедливо равенство

$$18-3(a-6)+b-3a+18=0.$$

Из системы трех уравнений

$$16+4a+2b+c=0,$$
$$-54+9a-3b+c=0,$$
$$18-3(a-6)+b-3a+18=0$$

находим $a=8$, $b=-6$, $c=-36$.

5. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб (рис. 7), ребра AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 перпендикулярны плоскости π основания $ABCD$.

Пусть точка O — центр куба. Тогда все точки M, удовлетворяющие условию задачи, находятся на окружности S, лежащей в

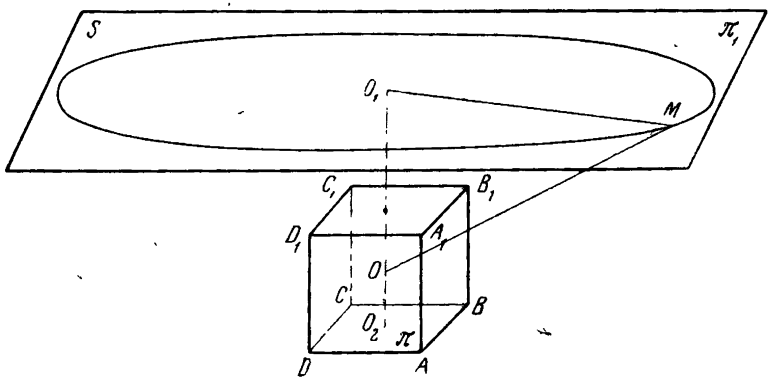

Рис. 7

плоскости π_1, параллельной плоскости π и отстоящей от плоскости π на расстоянии $2h$. Центр O_1 этой окружности является проекцией на плоскость π_1 центра O куба, а радиус r окружности S определяется соотношением

$$r=\sqrt{R^2-\left(\frac{3h}{2}\right)^2},\text{ и так как } R>3h,\text{ то}$$

$$r>\sqrt{9h^2-\left(\frac{3h}{2}\right)^2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}h.$$

Ясно, что если мы из точки M проведем прямые, соединяющие ее со всеми точками куба, то все точки пересечения этих прямых с плоскостью π и дадут тень, отбрасываемую кубом. При этом включим в тень и квадрат $ABCD$, лежащий в основании.

Для построения тени достаточно провести лишь прямые, соединяющие точку M с вершинами куба, и найти точки их пересече-

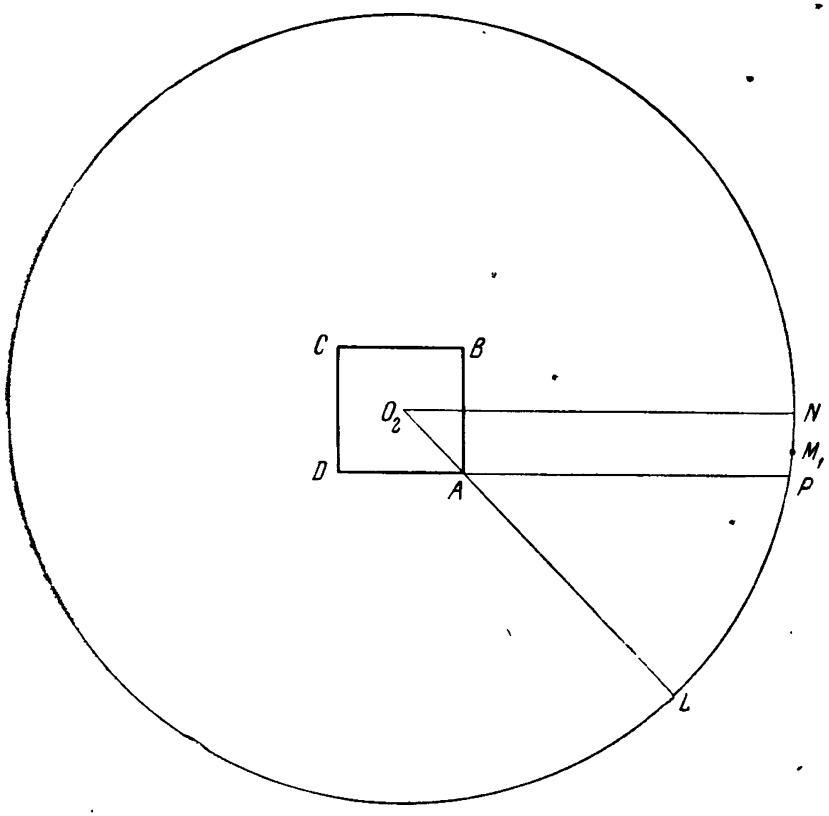

Рис. 8

ния с плоскостью π; соединив эти точки прямыми, получим контур тени.

Спроектируем окружность S на плоскость π; получим (рис. 8) окружности S_1 радиуса r, внутри которой находится квадрат $ABCD$ со стороной h. Центром O_2 окружности S_1 является проекция центра O куба на плоскость π.

Пусть K_1 — произвольная точка пространства, отстоящая от плоскости π на расстоянии, равном h. Обозначим через K ее прямоугольную проекцию на плоскость π.

Обозначим через K_2 проекцию точки K_1 из точки M на плоскость π. Тогда $M_1K_2=2\cdot M_1K$, где M_1—прямоугольная проекция точки M на плоскость π (рис. 9).

Пусть A_2, B_2, C_2, D_2 — проекции точек A_1, B_1, C_1, D_1 из точки M на плоскость π; на основании сделанного замечания имеем

$$A_2M_1 = 2AM_1,\ B_2M_1 = 2BM_1,\ C_2M_1 = 2CM_1,\ D_2M_1 = 2DM_1.$$

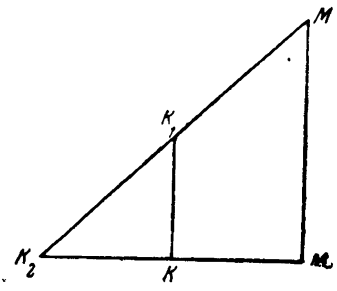

Рис. 9

Обозначим через N точку пересечения окружности S с прямой, проходящей через точку O_2 параллельно прямой DA, а через L — точку пересечения окружности S с прямой O_2A (рис. 10).

Достаточно рассмотреть тень лишь тогда, когда точка находится на дуге NL окружности S.

Обозначим через P точку пересечения окружности S с прямой DA. Рассмотрим два случая: 1° точка M_1 находится на дуге PN; 2° точка M_1 находится на дуге PL.

1°. Пусть точка M_1 находится на дуге PN. Выясним, при каком положении точки M_1 тень будет наибольшей. Если точка M_1 не совпадает с точкой P, то тенью является шестиугольник $AA_2D_2C_2B_2B$. Поэтому $B_2C_2 = A_2D_2 = C_2D_2 = 2h$ и, кроме того,

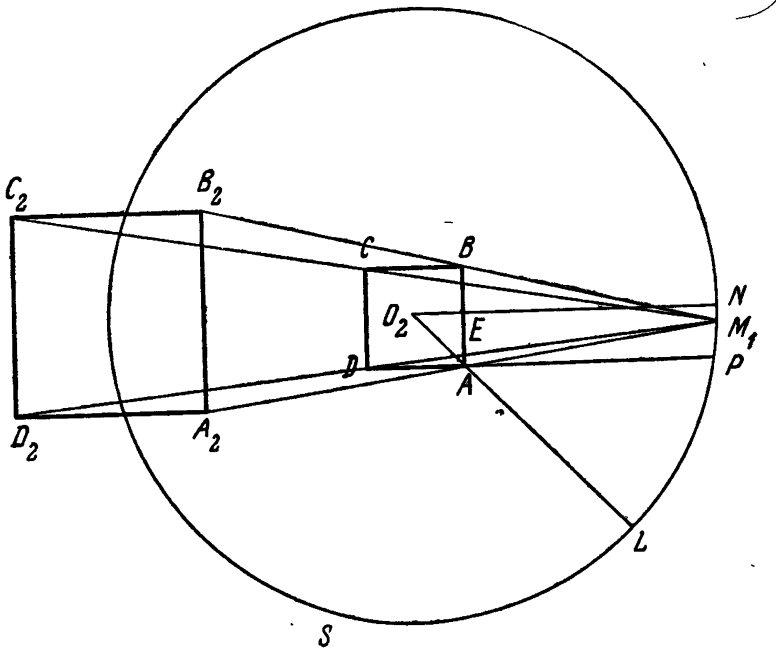

Рис. 10

$A_2D_2 \| AD$, $B_2C_2 \| BC$, $D_2C_2 \| DC$; соединив точки A_2 и B_2, получим, что тень состоит из квадрата $A_2B_2C_2D_2$ со стороной $2h$ и трапеции AA_2B_2B с основаниями h и $2h$ и высотой, равной расстоянию от точки M_1 до прямой AB.

Наибольшей эта высота будет тогда, когда точка M_1, перемещаясь по дуге PN, совпадает с точкой N, т. е. когда прямая M_1O_2 будет перпендикулярна ребру AB (рис. 11). Значит, когда точка M_1 движется по дуге NP от N к P, площадь тени уменьшается, и принимает наименьшее значение, когда точка M_1 совпадает с точкой P. В этом случае тенью будет пятиугольник $AD_2C_2B_2B$ (рис. 12), но его площадь также может быть найдена как площадь квадрата $A_2B_2C_2D_2$ со стороной $2h$ и трапеции AA_2B_2B с основа-

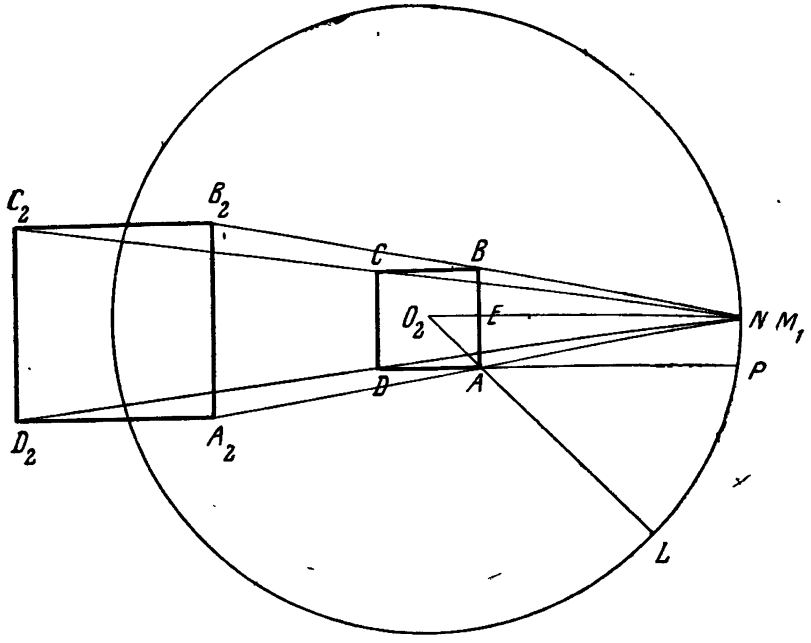

Рис. 11

ниями h и $2h$ и высотой, равной расстоянию от точки P до прямой AB.

2°. Посмотрим, как будет изменяться площадь тени, если точка M_1 движется по дуге PL. В этом случае тень $ABB_2C_2D_2D$ (рис. 13) состоит из двух прямоугольных треугольников (ABD со стороной h и $B_2C_2D_2$ со стороной $2h$) и трапеции BB_2D_2D, основания которой $h\sqrt{2}$ и $2h\sqrt{2}$, а высота равна расстоянию от точки M_1 до прямой BD.

Из точек дуги PL наиболее удаленной от прямой DB является точка L (рис. 14).

Для того чтобы найти наибольшую тень, остается сравнить площади двух теней, отбрасываемых точкой M на плоскость π в тех случаях, когда точка M_1 совпадает либо с точкой N, либо с точкой L. Пусть точка M_1 совпадает с точкой N (см. рис. 11). В этом случае тень состоит из квадрата $A_2B_2C_2D_2$ с площадью $4h^2$

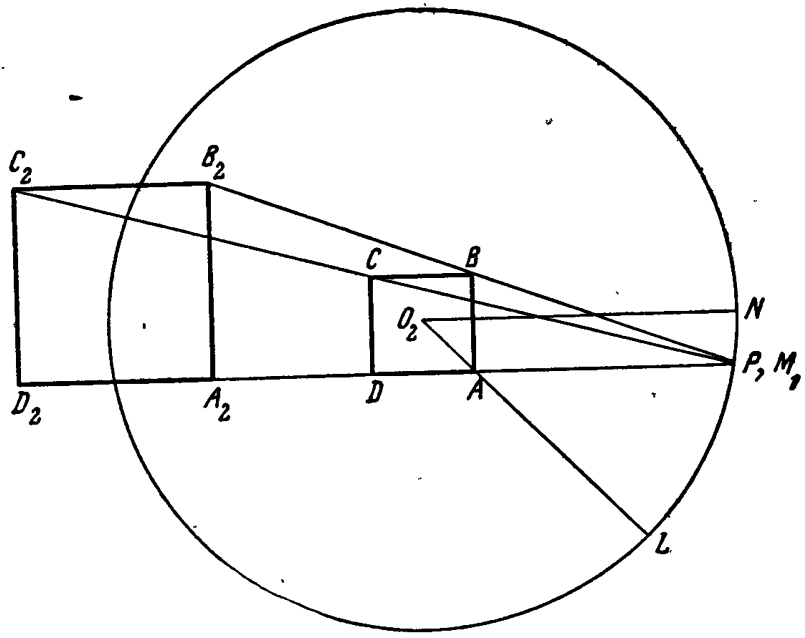

Рис. 12

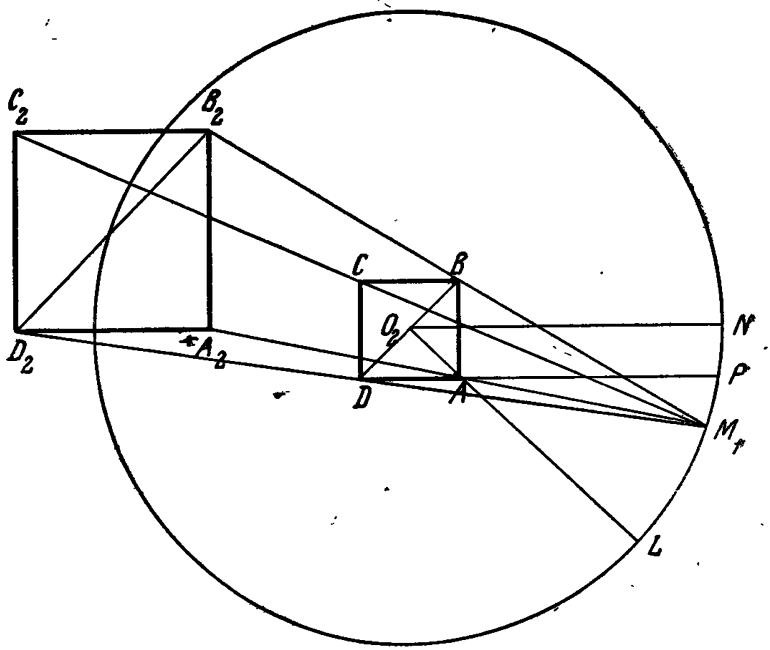

Рис. 13

и трапеции ABB_2A_2 с площадью $\frac{3}{2}h\cdot NE$ (E — проекция точки N на прямую AB).

Так как $NE=NO_2-O_2E=r-\frac{h}{2}$, то площадь тени равна

$$4h^2+\frac{3}{2}h\left(r-\frac{h}{2}\right)=\frac{13}{4}h^2+\frac{3}{2}hr.$$

Пусть теперь точка M_1 совпадает с точкой L (см. рис. 14). В этом случае тень состоит из треугольника ABD с площадью

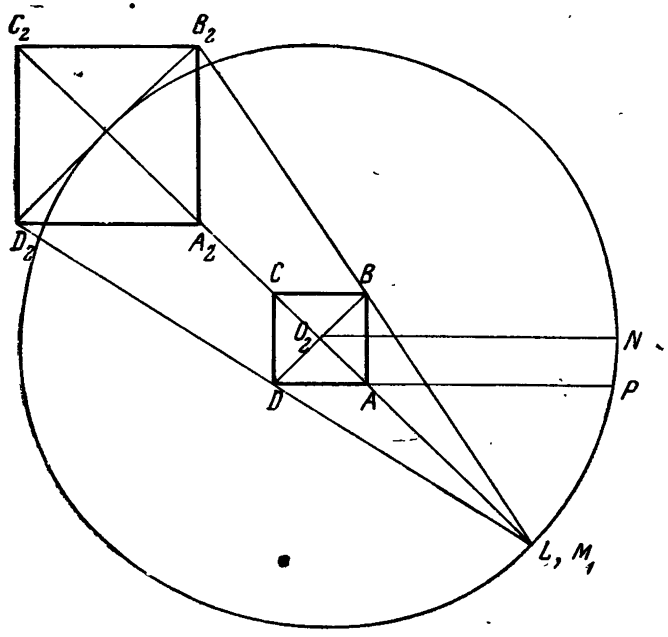

Рис. 14

$\frac{1}{2}h^2$, треугольника $B_2C_2D_2$ с площадью $2h^2$ и трапеции BB_2D_2D с площадью $\frac{BD+B_2D_2}{2}LO_2$.

Так как $LO_2=r$, $BD=h\sqrt{2}$, $B_2D_2=2h\sqrt{2}$, то площадь тени равна

$$\frac{h^2}{2}+2h^2+\frac{3}{2}\sqrt{2}\,hr=\frac{5}{2}h^2+\frac{3}{2}\sqrt{2}\,hr.$$

Теперь сравним две эти площади. Составим разность площадей и преобразуем ее последовательно:

$$\frac{5}{2}h^2+\frac{3}{2}\sqrt{2}\,hr-\left(\frac{13}{4}h^2+\frac{3}{2}hr\right)=$$

$$= -\frac{3}{4}h^2 + \frac{\sqrt{2}-1}{2}3hr = \frac{3h}{2}(\sqrt{2}-1)\left(r - h\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right).$$

Выше было доказано, что $r > \frac{3\sqrt{3}}{2}h$. Но так как

$$\frac{\sqrt{2}+1}{2}h < \frac{3\sqrt{3}}{2}h,$$

то

$$r - h\frac{\sqrt{2}+1}{2} > 0,$$

значит,

$$\frac{5}{2}h^2 + \frac{3}{2}\sqrt{2}\,hr - \left(\frac{13}{4}h^2 + \frac{3}{2}hr\right) > 0.$$

Таким образом, наибольшая площадь тени будет тогда, когда точка M_1 совпадает с точкой L.

Остается заметить, что точка L, центр O куба и его вершина A лежат в плоскости, перпендикулярной плоскости π основания.

Решение варианта 2

6. Обозначим через x вес одного из отрезанных кусков, через u и v — количество меди в 1 *кг* соответственно первого и второго кусков. Тогда в остатке первого куска содержится $(m-x)u$ *кг* меди; в остатке второго куска $(n-x)v$ *кг* меди; в первом отрезанном куске xu *кг* меди и, наконец, во втором отрезанном куске xv *кг* меди.

После того как куски снова сплавили, в первом куске оказалось $(m-x)u+xv$ *кг* меди, а во втором $(n-x)v+xu$ *кг* меди. Содержание меди в первом куске (в процентах)

$$100 \cdot \frac{(m-x)u+xv}{m}\,\%,$$

а во втором $100 \cdot \frac{(n-x)v+xu}{n}\,\%$. По условию имеем уравнение

$$100 \cdot \frac{(m-x)u+xv}{m} = 100 \cdot \frac{(n-x)v+xu}{n},$$

или

$$mnu - xn(u-v) = mnv + xm(u-v),$$

или

$$x(m+n)(u-v) = mn(u-v).$$

По условию процентное содержание меди в данных кусках различно, т. е. $u \neq v$. Поэтому из предыдущего уравнения находим

$$x = \frac{mn}{m+n}.$$

7. Данное неравенство выполнено тогда и только тогда, когда

$$0 \leqslant \log_a \frac{2x-3}{x-1} < 1. \qquad (1)$$

Рассмотрим два случая.

I. $0<a<1$.

Соотношения (1) равносильны следующим:

$$a < \frac{2x-3}{x-1} \leqslant 1.$$

Поскольку $\frac{2x-3}{x-1} = 2 - \frac{1}{x-1}$, то $a < 2 - \frac{1}{x-1} \leqslant 1$,

или

$$1 \leqslant \frac{1}{x-1} < 2-a. \qquad (2)$$

Из неравенства $1 \leqslant \frac{1}{x-1}$ имеем $1<x\leqslant 2$ и обратно; поэтому соотношения (2) эквивалентны таким:

$$0 < x-1 \leqslant 1 < (2-a)(x-1).$$

Но $2-a>0$ (так как $a<1$) и неравенство $1<(2-a)(x-1)$ можно переписать так:

$$x-1 > \frac{1}{2-a},$$

откуда $x > \frac{3-a}{2-a}$. Таким образом, имеем систему неравенств

$$1 < x \leqslant 2,$$

$$x > \frac{3-a}{2-a}.$$

Для решения этой системы нужно знать, как расположено число $\frac{3-a}{2-a}$ относительно 1 и 2. Неравенство

$$\frac{3-a}{2-a} > 1$$

равносильно (поскольку $2-a>0$) следующему: $3-a>2-a$, т. е. верно при любом a. Неравенство $\frac{3-a}{2-a} > 2$ равносильно такому:

$3-a \geqslant 4-2a$, или $a \geqslant 1$, что противоречит предположению $0<a<1$. Следовательно, для любого a, такого, что $0<a<1$, справедливо неравенство

$$1 < \frac{3-a}{2-a} < 2,$$

и решением системы являются числа x из полуинтервала

$$\frac{3-a}{2-a} < x \leqslant 2.$$

II. $a>1$.

В этом случае данное неравенство выполнено тогда и только тогда, когда

$$1 \leqslant \frac{2x-3}{x-1} < a, \tag{3}$$

или

$$1 \leqslant 2 - \frac{1}{x-1} < a,$$

или

$$2-a < \frac{1}{x-1} \leqslant 1. \tag{4}$$

Здесь рассмотрим три случая.

II_1. $1<a<2$.

В этом случае $2-a>0$, и так как $1-(2-a)=a-1>0$, то неравенствам (3) удовлетворяют только такие значения x, для которых $x-1>0$. Поэтому соотношения (3) выполняются тогда и только тогда, когда

$$1 \leqslant x-1 < \frac{1}{2-a},$$

или

$$2 \leqslant x \leqslant \frac{3-a}{2-a}.$$

II_2. $a>2$.

Найдем сначала решения в области $x>1$ (см. соотношения (4)). Так как $2-a<0<\frac{1}{x-1}$, то неравенство $2-a<\frac{1}{x-1}$ выполнено для всех рассматриваемых x, а неравенство $\frac{1}{x-1} \leqslant 1$ равносильно следующему ($x>1$!):

$$x-1 \geqslant 1,$$

откуда $x \geqslant 2$. Все x, удовлетворяющие этому неравенству, лежат в рассматриваемой области $x>1$ и поэтому являются решениями исходного неравенства.

Теперь, считая, конечно, по-прежнему $a>2$, найдем решение в области $x<1$. Из соотношений (4) находим

$$1-(2-a)=a-1>2,$$

поэтому существуют числа, бо́льшие $2-a$ и $\leqslant 1$. Так как $x<1$, то неравенство $\frac{1}{x-1}\leqslant 1$ выполняется. Решая же неравенство

$$\frac{1}{x-1}>2-a \quad (x<1),$$

получим

$$x<\frac{3-a}{2-a}.$$

Но

$$\frac{3-a}{2-a}-1=\frac{1}{2-a}<0,$$

поэтому

$$\frac{3-a}{2-a}<1,$$

а так как мы ищем решения $x<1$ (и для случая $a>2$), то все они будут

$$x<\frac{3-a}{2-a}.$$

II_3. $a=2$.

В этом случае неравенства (4) принимают вид

$$0<\frac{1}{x-1}\leqslant 1$$

и решениями их являются все значения x, такие, что

$$x\geqslant 2.$$

Итак, если $0<a<1$, то $\frac{3-a}{2-a}<x\leqslant 2$; если $1<a<2$, то $2\leqslant x<\frac{3-a}{2-a}$; если $a=2$, то $x\geqslant 2$; если $a>2$, то $x<\frac{3-a}{2-a}$, $x\geqslant 2$.

8. Преобразуем левую часть данного уравнения следующим образом:

$$\cos^2 3x-\operatorname{tg}^2 3x-\sin^2 3x+1=\cos^2 3x(1-\operatorname{tg}^2 3x)+1-\operatorname{tg}^2 3x=$$
$$=(1-\operatorname{tg}^2 3x)(1+\cos^2 3x).$$

Имеем уравнение

$$(1-\operatorname{tg}^2 3x)(1+\cos^2 3x)=0.$$

Поскольку ни при каких значениях x $1+\cos^2 3x\neq 0$, то получаем уравнение

$$1-\operatorname{tg}^2 3x=0,$$

эквивалентное данному, откуда $\operatorname{tg}^2 3x=1$, и следовательно, $3x=(2k+1)\frac{\pi}{4}$, так что $x=(2k+1)\frac{\pi}{12}$, где k принимает все целые значения.

9. Первое решение: разделив x^4+1 на x^2+px+q, получим в остатке

$$(q-p^2)px+1-p^2q+q^2.$$

Следовательно, x^4+1 делится на x^2+px+q в том и только в том случае, когда

$$\begin{aligned} p(2q-p^2)&=0,\\ 1-p^2q+q^2&=0; \end{aligned} \qquad (1)$$

$p\neq 0$, так как в противном случае из второго уравнения получаем $1+q^2=0$, что не выполняется при действительных значениях q (см. условие задачи). Значит, из первого уравнения $p^2=2q$ и подставляя $2q$ вместо p^2 во второе уравнение, получим $q^2=1$. Но $q=\frac{p^2}{2}>0$, так что $q=1$ и $p^2=2$. Таким образом, система (1) имеет два решения:

$$p_1=\sqrt{2},\quad q_1=1;\quad p_2=-\sqrt{2},\quad q_2=1.$$

Итак, x^4+1 делится на $x^2+x\sqrt{2}+1$ и на $x^2-x\sqrt{2}+1$.

Второе решение. Многочлен x^4+1 делится на x^2+px+q в том и только в том случае, когда существуют такие числа a и b, что выполняется равенство многочленов

$$x^4+1=(x^2+px+q)(x^2+ax+b).$$

Раскрывая скобки в правой части, получим многочлен

$$x^4+(p+a)x^3+(q+ap+b)x^2+(aq+bp)x+bq.$$

Два многочлена равны тогда и только тогда, когда равны коэффициенты при соответствующих степенях x. Таким образом,

$$\begin{aligned} p+a&=0,\\ q+ap+b&=0, \end{aligned}$$

$$aq + bp = 0,$$

$$bq = 1.$$

Из первого уравнения $p = -a$. Тогда

$$\left.\begin{aligned} q - a^2 + b &= 0, \\ a(q - b) &= 0, \\ bq &= 1. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Если $a=0$, то из первого уравнения этой системы имеем $b+q=0$, т. е. $b=-q$, а тогда третье принимает вид $q^2=-1$, что противоречит условию задачи. Значит, $a\neq 0$. Тогда из второго уравнения системы (1) находим $q=b$, а из третьего $b^2=1$, значит, $a^2=2b$, так что $b>0$. Следовательно, $b=1$, $q=1$, $a^2=2$. Отсюда $a_1=\sqrt{2}$, $a_2=-\sqrt{2}$, т. е. $p_1=-\sqrt{2}$, $p_2=\sqrt{2}$.

Таким образом, рассматриваемая система имеет два решения:

$$a_1 = \sqrt{2}, \quad b_1 = 1, \quad p_1 = -\sqrt{2}, \quad q_1 = 1;$$

$$a_2 = -\sqrt{2}, \quad b_2 = 1, \quad p_2 = \sqrt{2}, \quad q_2 = 1.$$

Следовательно, при $p=-\sqrt{2}$, $q=1$ и при $p=\sqrt{2}$, $q=1$, и только при таких значениях p и q существуют числа a и b, обладающие требуемым свойством.

Третье решение. Многочлен x^4+1 делится на x^2+px+q в том и только в том случае, когда оба корня этого трехчлена являются его корнями. Решая биквадратное уравнение *

$$x^4 + 1 = 0,$$

получаем корни

$$x_1 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \quad x_2 = \frac{1-i}{\sqrt{2}}, \quad x_3 = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}, \quad x_4 = \frac{-1-i}{\sqrt{2}}.$$

Но коэффициенты трехчлена x^2+px+q действительные, так что его корни должны быть сопряженными. Следовательно, его корни либо x_1 и x_2, либо x_3 и x_4. В первом случае $p=-(x_1+x_2)=-\sqrt{2}$, $q=1$, во втором $p=-(x_3+x_4)=\sqrt{2}$, $q=x_3x_4=1$.

10. Пусть $SKLM$ — правильная пирамида; S — ее вершина, KLM — правильный треугольник, лежащий в основании. Пусть O — прямоугольная проекция вершины S на плоскость P.

Так как точка A отстоит от плоскости P на расстоянии h, а от точки O на расстоянии l, то точка A лежит на окружности π, которая расположена в плоскости P', параллельной P и отстоящей от

* $x^4+1=0$, $x^4+2x^2+1-2x^2=0$, $(x^2+1)^2-(x\sqrt{2})^2=0$, $x^2+x\sqrt{2}+1=0$, $x^2-x\sqrt{2}+1=0$; отсюда получаются значения x_1, x_2, x_3, x_4, указанные в тексте.

нее на расстоянии h (рис. 15). Центром C окружности π является проекция точки O на плоскость P'.

Рассмотрим только тот случай, когда $h>SO$ и когда точки A и S расположены по одну сторону от плоскости P.

Если точка A перемещается по окружности π, то точка A' — тень вершины S на плоскость P перемещается по некоторой окружности π' (эта окружность π' является центральной проекцией из точки S окружности π на плоскость P').

На рис. 16 изображен вид рис. 15 по направлению прямой CO.

Пусть N — точка пересечения с окружностью π прямой, прохо-

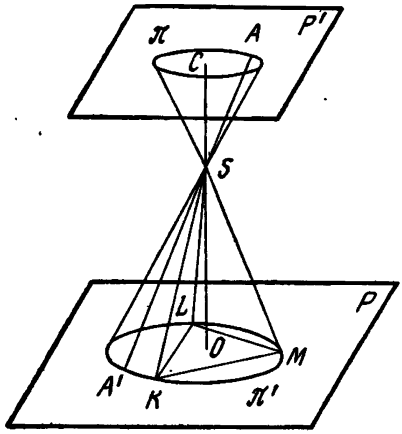

Рис. 15

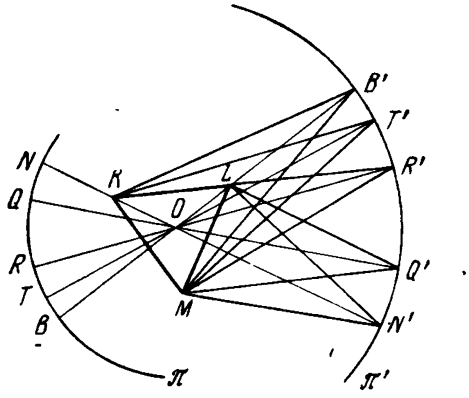

Рис. 16

дящей через точку O перпендикулярно ML, а B — точка пересечения с окружностью π прямой, проходящей через точку O перпендикулярно KM.

Для решения задачи достаточно рассмотреть перемещение точки A лишь по дуге NB.

Из точки N не видна только сторона основания LM и поэтому тенью от пирамиды является $\triangle LN'M$, где N' — тень вершины S.

Сам $\triangle KLM$ мы не будем относить к тени.

Пусть теперь точка A движется по окружности от N к B. Тень A' вершины S при этом перемещается по окружности π' от N' к B'. Пусть R' — точка окружности π', лежащая на прямой KL и R — соответствующее положение точки A. Точка R лежит на прямой SR' и точки S и R' лежат в плоскости грани KLS; следовательно, и точка A лежит в плоскости грани KLS. Поэтому если точка A занимает некоторое положение Q между N и R (включая самое точку R), то из нее не видно только одной стороны основания LM, и тенью пирамиды является $\triangle LQ'M$, площадь которого меньше площади $\triangle LN'M$, так как эти треугольники имеют общее основание, а высота треугольника $LQ'M$ меньше высоты треугольника $LN'M$.

Если же точка A занимает некоторое положение T между R и B, то из нее не видны стороны основания KL и LM. Поэтому тенью пирамиды будет четырехугольник $T'KLM$; $\triangle KLM$ дополняет этот четырехугольник до $\triangle KT'M$, и этот же треугольник дополняет $\triangle LR'M$ до $\triangle KR'M$. Но, как и выше, площадь $\triangle KT'M$, очевидно, больше, чем площадь $\triangle KR'M$, и поэтому площадь $T'KLM$ больше площади $\triangle LR'M$.

Итак, когда точка A движется от N к R, площадь тени уменьшается, а когда она движется далее от R к B, площадь тени возрастает. Следовательно, площадь тени будет наименьшей, если источник света находится в точке R, т. е. в плоскости грани KLS.

§ 7. ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

ВАРИАНТЫ ПИСЬМЕННЫХ ЭКЗАМЕНОВ

(дневное отделение)

Вариант 1

1. Для каждого действительного числа a решить неравенство

$$ax > \frac{1}{x}.$$

2. Найти все значения x и y (в том числе комплексные), такие, что числа x, $x+2y$, $2x+y$ образуют арифметическую прогрессию, а числа $(y+1)^2$, $xy+5$, $(x+1)^2$ образуют геометрическую прогрессию.

3. Решить уравнение

$$\cos^4 x + \sin^4 x = 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right).$$

4. В равнобедренном треугольнике дана боковая сторона b и угол при основании α. Вычислить расстояние от центра вписанной окружности до центра описанной окружности.

5. Правильная пирамида, в основании которой лежит квадрат со стороной a, вращается вокруг прямой, проходящей через ее вершину. Эта прямая параллельна одной из сторон квадрата, лежащего в основании пирамиды. Вычислить объем тела вращения, если плоский угол при вершине пирамиды равен α.

Вариант 2

6. Для каждого действительного числа a решить уравнение

$$x|x+1|+a=0.$$

7. Решить неравенство

$$\frac{2x}{\sqrt{2x+9}} < \sqrt{1+2x} - 1.$$

8. Решить систему уравнений

$$\sin(x-y)=3\sin x\cos y-1,$$

$$\sin(x+y)=-2\cos x\sin y.$$

9. Из точки A, лежащей вне окружности радиуса r, проведена секущая, не проходящая через центр O окружности. Пусть B и C — точки, в которых секущая пересекает окружность. Найти

$$\operatorname{tg}\frac{\angle AOB}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\angle AOC}{2},$$

если $OA=a$.

10. Три шара касаются плоскости треугольника ABC в его вершинах и попарно между собой. Найти радиусы шаров, если известны длина c стороны AB и прилежащие к ней углы A и B.

Вариант 3

11. Для каждого действительного a решить уравнение

$$\sqrt{|x|+1}-\sqrt{|x|}=a$$

(найти только действительные корни).

12. Решить систему уравнений

$$\cos x+\cos y=1,$$

$$\cos\frac{x}{2}+\cos\frac{y}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}-1.$$

13. Решить неравенство

$$3\sin 2x>\sin x+\cos x+1.$$

14. AOB — сектор круга радиуса r. Угол $\angle AOB=\alpha(\alpha<\pi)$. Найти радиус окружности, лежащей внутри этого сектора и касающейся хорды AB, дуги $\overset{\smile}{AB}$ и биссектрисы угла AOB.

15. Две равные сферы радиуса r касаются друг друга и граней двугранного угла, величина которого равна α. Найти радиус сферы, которая касается граней двугранного угла и обеих данных сфер.

Вариант 4

16. Для каждого действительного числа a решить уравнение

$$|\cos 2x|=|\sin^2 x-a|\quad(0\leqslant x\leqslant 2\pi).$$

17. Найти все действительные значения k, при которых решение системы

$$x-2y=k,$$

$$3x+y=8$$

удовлетворяет условию

$$x > \frac{1}{k}, \quad y > 0.$$

18. Решить уравнение

$$4\sin x + 2\cos x = 2 + 3\operatorname{tg} x.$$

19. Даны две концентрические окружности радиусов r и R, $r<R$. Через некоторую точку P меньшей окружности проведена прямая, не проходящая через центр окружностей и пересекающая бо́льшую окружность в точках B и C. Пусть перпендикуляр к BC в точке P пересекает меньшую окружность в точке A. Найти сумму

$$PA^2 + PB^2 + PC^2.$$

20. Дан угол α $(\alpha < \frac{\pi}{2})$ осевого сечения прямого кругового конуса с вершиной S и образующей длины l. Через точку A, взятую на основании конуса, проведена плоскость P, которая перпендикулярна к образующей SA. Через вершину конуса проведена плоскость Q. Эта плоскость перпендикулярна плоскости осевого сечения конуса, проходящего через SA, и составляет с образующей SA конуса угол β $(\beta < \frac{\alpha}{2})$. Плоскость Q рассекает конус по двум образующим. Пусть продолжение этих образующих пересекает плоскость P в точках C_1 и C_2. Найти длину отрезка C_1C_2.

Вариант 5

21. Для каждого положительного числа a $(a \neq 1)$ решить уравнение

$$(\log_a \sin x)^2 + \log_a \sin x - a = 0.$$

22. Решить неравенство

$$1 - \frac{\cos x}{4\cos^2 x - 3} < \frac{1}{3 - 4\cos^2 x}, \quad 0 < x < \pi.$$

23. Найти коэффициент при x^n в разложении

$$(1 + x + 2x^2 + \ldots + nx^n)^2.$$

24. AB и CD — два взаимно перпендикулярных диаметра окружности S_1. Окружность S_2 имеет центр D и радиус DA. Из точки D проведены два луча, пересекающие окружность S_1 в точках P и Q, а дугу $\overset{\frown}{AB}$ окружности S_2, лежащую внутри окружности S_1, — в точках M и N. Пусть P' и Q' — проекции точек P и Q на диаметр AB. Доказать, что фигура, ограниченная дугами $\overset{\frown}{PQ}$, $\overset{\frown}{MN}$ и отрезками MP, NQ, равновелика треугольнику $DP'Q'$.

25. Три сферы радиусов r, r и R внешним образом касаются друг друга и все касаются некоторой плоскости. Найти радиус сферы, касающейся данных сфер и этой плоскости.

Вариант 6

26. Найти все действительные значения a, при которых корни уравнения

$$x^2 + x + a = 0$$

действительные и оба корня больше a.

27. Решить неравенство

$$\frac{\sin x - 2}{4\sin^2 x - 1} > 2.$$

28. Решить уравнение

$$9^{-|x|} = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x+1|+|x-1|}.$$

29. Даны углы B и C треугольника ABC ($\angle B \neq \angle C$). Найти котангенс острого угла, который образует медиана, выходящая из вершины A, со стороной BC.

30. Две равные сферы касаются друг друга и граней двугранного угла. Третья сфера меньшего радиуса также касается граней этого двугранного угла и обеих данных сфер. Дано отношение m радиуса меньшей сферы к радиусу одной из равных сфер. Найти величину α двугранного угла. В каких границах может изменяться m?

Вариант 7

31. Для каждого действительного числа a решить уравнение

$$\left(\frac{1+x}{\sqrt{x}}\right)^2 + 2a\frac{1+x}{\sqrt{x}} + 1 = 0.$$

32. Решить неравенство

$$\frac{\operatorname{tg}^2 x - 2}{\operatorname{tg}^2 x - 1} < \frac{1}{2}.$$

33. Доказать, что число

$$\underbrace{111\ldots11}_{2n \text{ единиц}} - \underbrace{222\ldots22}_{n \text{ двоек}}$$

есть квадрат целого числа.

34. Из точки A, лежащей на окружности радиуса r, проведены две хорды AC и AB. Эти хорды лежат по одну сторону от диаметра окружности, проходящего через точку A. Дана длина b бóльшей хорды и угол $\angle BAC = \alpha$. Найти радиус окружности, которая касается хорд AB и AC и дуги $\overset{\smile}{BC}$.

35. Два равных конуса имеют общую вершину и касаются по общей образующей. Угол осевого сечения конуса равен 2α. Найти

двугранный угол между двумя плоскостями, каждая из которых касается обоих конусов, но не проходит через их общую образующую.

Вариант 8

36. Для каждого действительного числа a решить уравнение

$$x^2 + |x| + a = 0$$

(найти только действительные корни).

37. Решить неравенство

$$\frac{\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} > 2.$$

38. Сколькими способами можно выбрать из ста первых натуральных чисел три таких, сумма которых делилась бы на три? (порядок слагаемых не учитывается).

39. На одной из сторон угла, равного α, даны две точки, расстояния которых до другой стороны равны b и c. Найти радиус окружности, проходящей через эти две точки и касающейся другой стороны.

40. Угол между образующей прямого кругового конуса и его высотой равен α. Найти угол между двумя образующими этого конуса, если известно, что плоскости, касающиеся конуса по этим образующим, взаимно перпендикулярны.

ВАРИАНТЫ ПИСЬМЕННЫХ ЭКЗАМЕНОВ

(вечернее отделение)

Вариант 1

41. Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{2}}(x+1) > \log_2(2-x).$$

42. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x = \sin 2y \\ \cos x = \sin y. \end{cases} \quad (0 \leqslant x \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant y \leqslant \pi),$$

43. Для каждого отрицательного числа m решить уравнение

$$4^x - 4m \cdot 2^x + 2m + 2 = 0.$$

44. В треугольнике ABC даны углы A, B, C и радиус R описанной вокруг него окружности. Внутри этого треугольника взяты две

точки P и Q, такие, что $\angle PCA=\angle QCB=\frac{C}{3}$, $\angle PAC=\frac{A}{3}$, $\angle QBC=\frac{B}{3}$. Найти площадь треугольника PQC.

45. Дан равнобедренный треугольник ABC, $AB=AC=b$, а угол $BAC=\alpha$. Этот треугольник вращается вокруг оси, проходящей через вершину A так, что угол между этой осью и плоскостью треугольника равен β, а основание треугольника перпендикулярно оси. Вычислить объем тела, полученного при вращении треугольника ABC.

Вариант 2

46. Решить уравнение

$$(x+1)(|x|-1)=-\frac{1}{2}.$$

47. Зная, что $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{tg}\beta$ — корни квадратного уравнения

$$x^2+px+q=0,$$

вычислить

$$\sin^2(\alpha+\beta)+p\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)+q\cos^2(\alpha+\beta).$$

48. Решить неравенство

$$\sqrt{3-x}-\sqrt{x+1}>\frac{1}{2}.$$

49. В круговой сектор, ограниченный радиусами OA и OB с центральным углом $\alpha\left(\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$, вписан квадрат так, что две его соседние вершины лежат на радиусе OA, третья вершина — на радиусе OB, а четвертая вершина — на дуге $\overset{\smile}{AB}$. Найти отношение площадей квадрата и сектора.

50. Угол в осевом сечении прямого кругового конуса равен α. Через его вершину под углом β к оси конуса $\left(\beta<\frac{\alpha}{2}\right)$ проведена плоскость. Найти угол между двумя образующими конуса, по которым проведенная плоскость пересекает его поверхность

Вариант 3

51. Решить неравенство

$$\frac{2}{x}>x+1.$$

52. Решить уравнение

$$\sqrt{\sin x}+\cos x=0.$$

53. Найти все действительные решения системы

$$\frac{2x^2}{1+x^2}=y;\qquad \frac{2y^2}{1+y^2}=x.$$

54. Внутри равнобедренного прямоугольного треугольника ABC, катеты которого равны a ($CA=CB=a$), взята точка P, такая, что $\angle PAC=\frac{\pi}{12}$, $\angle PBC=\frac{\pi}{24}$. Найти расстояние от точки P до центра вписанной окружности.

55. В основании правильной четырехугольной пирамиды лежит квадрат со стороной a. Высота пирамиды равна диагонали этого квадрата. Пирамида рассечена плоскостью, параллельной ее высоте и двум противоположным сторонам основания. Найти периметр сечения, если известно, что в него можно вписать окружность.

Вариант 4

56. Решить неравенство

$$x^{\frac{1}{\lg x}}\cdot \lg x<1.$$

57. Решить уравнение

$$(\sin x+\cos x)^2=\operatorname{tg} x\cos 2x.$$

58. Для каждого действительного числа a решить уравнение

$$\sqrt[4]{\frac{a-x}{1+x}}-\sqrt[4]{\frac{1+x}{a-x}}=2.$$

59. Три окружности расположены на плоскости так, что каждая из них внешним образом касается двух других. Радиусы окружностей относятся как $1:2:3$. Вычислить углы треугольника, вершины которого расположены в точках касания.

60. Через середину диагонали куба перпендикулярно к ней проведена плоскость. Определить площадь фигуры, получившейся в сечении куба этой плоскостью, если ребро куба равно a.

Решение варианта 1

(дневное отделение)

1. Перепишем данное неравенство в виде

$$ax-\frac{1}{x}>0,\text{ или }\frac{ax^2-1}{x}>0.$$

Если $a\leqslant 0$, то все решения этого неравенства $x<0$. Если $a>0$, то данное неравенство эквивалентно следующему:

$$y=\frac{\left(x+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)\left(x-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)}{x}>0.$$

Все решения данного неравенства (в случае $a>0$) образуют два интервала $\left(-\frac{1}{\sqrt{a}}, 0\right)$ и $\left(\frac{1}{\sqrt{a}}, +\infty\right)$, или $-\frac{1}{\sqrt{a}}<x<0$, $\frac{1}{\sqrt{a}}<x<+\infty$. Результаты приведены на рис. 17.

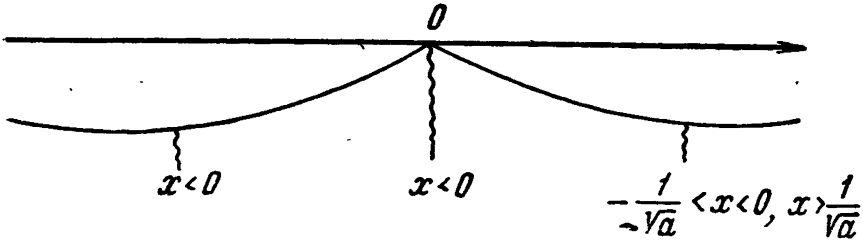

Рис. 17

2. В соответствии с условием задачи имеем систему уравнений

$$x+2x+y=2(x+2y),$$
$$(x+1)^2(y+1)^2=(xy+5)^2,$$

или

$$x=3y,$$
$$(3y+1)^2(y+1)^2=(3y^2+5)^2,$$

или

$$x=3y,$$
$$[(3y+1)(y+1)+3y^2+5][(3y+1)(y+1)-3y^2-5]=0,$$

или

$$x=3y,$$
$$(6y^2+4y+6)(4y-4)=0.$$

Эта система распадается на две:

$$\left.\begin{array}{r} x=3y, \\ 3y^2+2y+3=0 \end{array}\right\} \quad (1) \quad \text{и} \quad \left.\begin{array}{r} x=3y, \\ y=1. \end{array}\right\} \quad (2)$$

Отсюда находим три решения: $x_1=3$, $y_1=1$;

$$x_2=-1+2i\sqrt{2}, \quad y_2=\frac{-1+2i\sqrt{2}}{3}; \quad x_3=-1-2i\sqrt{2},$$

$$y_3=\frac{-1-2i\sqrt{2}}{3}.$$

3. Преобразуем данное уравнение следующим образом:

$$(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x = \cos 4x + \cos\frac{\pi}{3},$$

$$1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = \cos 4x + \frac{1}{2},$$

$$1 - \frac{1}{4}(1 - \cos 4x) = \cos 4x + \frac{1}{2}.$$

Отсюда $\cos 4x = \frac{1}{3}$ и, следовательно,

$$x = \frac{k\pi}{2} \pm \frac{1}{4}\arccos\frac{1}{3},$$

где k — любое целое число.

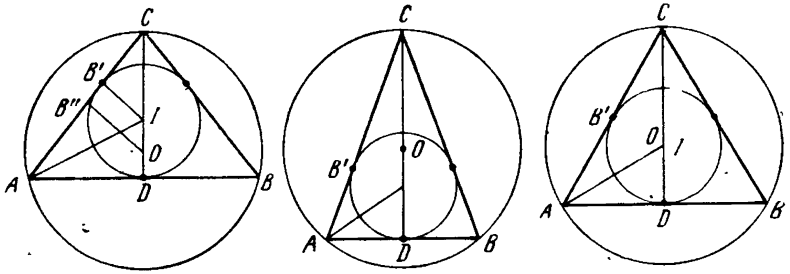

Рис. 18

4. Пусть CD — высота равнобедренного треугольника ABC $(AC=BC)$. Так как центры I и O вписанной и описанной окружностей лежат на луче CD, то расстояние d между ними всегда равно $|CO-CI|$, независимо от того, лежит ли точка I между точками C и O, или точка O между точками C и I, или если точки I и O совпадают (рис. 18). По теореме синусов

$$CO = R = \frac{b}{2\sin\alpha},$$

$$CI = CD - ID = b\sin\alpha - AD\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = b\sin\alpha - b\cos\alpha\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2},$$

так что

$$IO = d = \left|\frac{b}{2\sin\alpha} - b\sin\alpha + b\cos\alpha\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right| =$$

$$= b\left|\frac{1}{2\sin\alpha} - \frac{\sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\alpha\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}\right| =$$

$$= b\left|\frac{1}{2\sin\alpha} - \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}\right| = \frac{b}{2\sin\alpha}\left|1 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2}\right| =$$

$$= \frac{b}{2\sin\alpha}\left|4\cos^2\frac{\alpha}{2} - 3\right| = \frac{b}{2\sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2}}\left|4\cos^3\frac{\alpha}{2} - 3\cos\frac{\alpha}{2}\right| =$$

$$= \frac{b\left|\cos\frac{3\alpha}{2}\right|}{2\sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Замечание. Из проведенных выкладок следует, что $CO - CI > 0$ тогда и только тогда, когда $\cos\frac{3\alpha}{2} > 0$, а так как α — острый угол, то это неравенство имеет место тогда и только тогда, когда $\frac{3\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$, т. е. $\alpha < \frac{\pi}{3}$. Таким образом, центр описанной окружности равнобедренного треугольника лежит «ниже» центра вписанной окружности тогда и только тогда, когда угол при основании равнобедренного треугольника меньше $\frac{\pi}{3}$, иначе угол при вершине больше $\frac{\pi}{3}$. Если $\alpha = \frac{\pi}{3}$, то треугольник равносторонний и точки I и O совпадают.

Все это можно установить и геометрически. Прежде всего отметим, что условие $C > \frac{\pi}{3}$ эквивалентно (для равнобедренного треугольника с вершиной C) следующему: $c > b$ (где c и b — длины сторон AB и AC). Заметим, что центр O окружности, описанной вокруг равнобедренного треугольника ABC ($AC = BC$), является точкой пересечения медиатрисы* стороны AC с высотой, опущенной из вершины C на сторону AB. Если $c > b$, то отношение

$$\frac{AB'}{B'C} = \frac{p - b}{p - c},$$

в котором точка B' прикосновения к стороне AC вписанной окружности

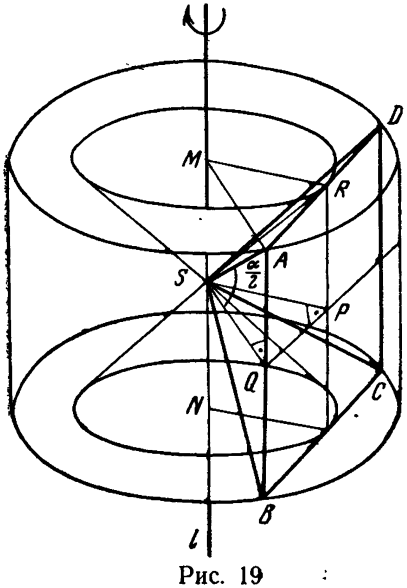

Рис. 19

* Медиатрисой отрезка AB называется прямая, проходящая через середину этого отрезка перпендикулярно к нему.

делит сторону AC, больше 1, а потому точка B' лежит между точкой C и серединой B'' отрезка AC. Но так как $B''O \| B'I$, то точка I лежит «выше» точки O. Аналогично доказывается, что в случае $c<b$ точка I лежит «ниже» точки O (в случае $c=b$ точки O и I совпадают) (см. рис. 18).

5. Пусть $SABCD$ — данная пирамида ($ABCD$ — квадрат со стороной a), а l — ось вращения (рис. 19), параллельная AB. При вращении вокруг оси l отрезки AD и BC опишут одинаковые плоские кольца; радиус внутренней окружности кольца равен $MR = NT = SP$, где SP — высота пирамиды, а радиус внешней окружности кольца равен $MA = NB = SQ$, где SQ — апофема пирамиды.

Апофемы SR и ST опишут равные конусы, высота каждого из которых равна $\frac{a}{2}$, а радиус основания равен высоте SP пирамиды. Наконец, квадрат $ABCD$ опишет полый цилиндр с внутренним радиусом SP и внешним SQ. Искомый объем V равен разности $V_1 - 2V_2$, где V_1 — объем цилиндра с радиусом SQ и высотой a, а V_2 — объем одного из указанных выше конусов. Итак,

$$V = \pi \cdot SQ^2 a - 2 \cdot \frac{1}{3} \pi \cdot SP^2 \cdot \frac{a}{2};$$

но

$$SQ = \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}, \quad SP = \sqrt{SQ^2 - PQ^2} = \frac{a}{2} \sqrt{\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} - 1},$$

следовательно,

$$V = \pi \frac{a^2}{4} \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} \cdot a - \frac{2}{3} \pi \frac{a^2}{4} \left(\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} - 1 \right) \cdot \frac{a}{2} =$$

$$= \frac{\pi a^3}{12} \left(1 + 2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} \right).$$

Решение варианта 2

6. При решении этой и многих других задач, предлагавшихся на физическом факультете, хорошо применять следующую теорему: если корни квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ с действительными коэффициентами действительны и различны, то число λ меньше обоих корней тогда и только тогда, когда выполнены неравенства

$$\lambda^2 + p\lambda + q > 0, \quad 2\lambda + p < 0.$$

Число λ больше одного из корней и меньше другого тогда и только тогда, когда выполнено неравенство

$$\lambda^2 + p\lambda + q < 0.$$

Число λ больше обоих корней, если выполнены неравенства

$$\lambda^2+p\lambda+q>0, \quad 2\lambda+p>0.$$

Доказательство этой теоремы таково: число λ меньше обоих корней x_1 и x_2 (напомним читателю, что мы предполагаем, что эти корни действительны и различны) тогда и только тогда, когда разности $\lambda-x_1$ и $\lambda-x_2$ — числа отрицательные, а это будет тогда и только тогда, когда их произведение положительно, а сумма отрицательна:

$$(\lambda-x_1)(\lambda-x_2)>0, \quad \lambda-x_1+\lambda-x_2<0,$$

или

$$\lambda^2-(x_1+x_2)\lambda+x_1x_2>0, \quad 2\lambda-(x_1+x_2)<0,$$

и так как $x_1+x_2=-p$, $x_1x_2=q$, то

$$\lambda^2+p\lambda+q>0, \quad 2\lambda+p<0.$$

Далее, число λ больше одного корня и меньше другого тогда и только тогда, когда разности $\lambda-x_1$ и $\lambda-x_2$ — числа разных знаков, т. е. $(\lambda-x_1)(\lambda-x_2)<0$, или $\lambda^2+p\lambda+q<0$. Наконец, число λ больше обоих корней x_1 и x_2 тогда и только тогда, когда числа $\lambda-x_1$ и $\lambda-x_2$ положительные, а это имеет место тогда и только тогда, когда произведение и сумма этих чисел положительны:

$$(\lambda-x_1)(\lambda-x_2)>0, \quad \lambda-x_1+\lambda-x_2>0,$$

или

$$\lambda^2+p\lambda+q>0, \quad 2\lambda+p>0.$$

Перейдем теперь к решению данной задачи. Заметим прежде всего, что так как a действительное число, то данное уравнение не может иметь мнимых корней. Далее, $x=-1$ является корнем данного уравнения тогда и только тогда, когда $a=0$; при этом уравнение имеет еще корень $x=0$. Будем в дальнейшем считать, что $a\neq 0$. Тогда $x=-1$ не корень данного уравнения и, значит, если x — корень данного уравнения, то $x+1\neq 0$. Итак, считая, что $a\neq 0$, найдем сначала те корни данного уравнения, для которых $x>-1$, т. е. $x+1>0$. При этом условии $|x+1|=x+1$, и данное уравнение принимает вид

$$x^2+x+a=0.$$

Мы должны исследовать, при каком условии это уравнение имеет действительные корни, бо́льшие -1. Прежде всего должно быть $1-4a\geqslant 0$ (условие действительности корней), или $a\leqslant\frac{1}{4}$.

Если $a=\frac{1}{4}$, то корни уравнения $x^2+x+a=0$ будут $x_1=x_2=-\frac{1}{2}$;

это корни и данного уравнения, так как $-\frac{1}{2} > -1$. Будем считать, что $a < \frac{1}{4}$. Тогда корни x_1 и x_2 уравнения $x^2+x+a=0$ действительны и различны. Они больше -1, если (см. теорему, сформулированную в начале решения этого примера) выполняются неравенства

$$(x^2+x+a)_{x=-1} > 0, \quad (2x+1)_{x=-1} < 0,$$

или (второе неравенство выполняется $-1<0$), $a>0$. Итак, если $0<a<\frac{1}{4}$, то уравнение $x^2+x+a=0$ имеет два действительных корня:

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4a}}{2}$$

и оба они больше -1, а потому являются и корнями данного уравнения.

Далее, число -1 будет заключено между корнями x_1 и x_2 уравнения $x^2+x+a=0$, если

$$(x^2+x+a)_{x=-1} < 0, \text{ или } a < 0.$$

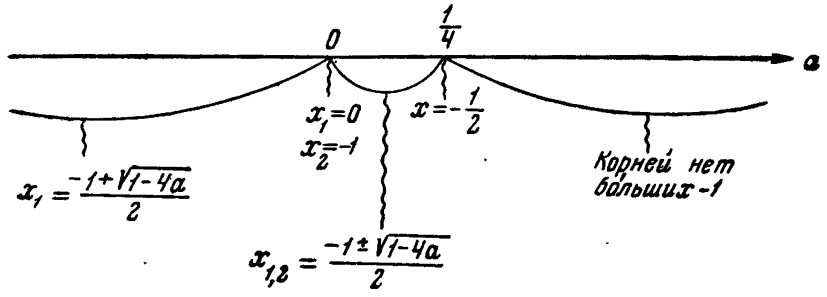

Рис. 20

Итак, если $a<0$, то уравнение $x^2+x+a=0$ имеет два действительных корня x_1 и x_2, но только бóльший из них

$$x = \frac{-1+\sqrt{1-4a}}{2}$$

больше -1, а потому только он будет корнем данного уравнения (бóльшим -1). На рис. 20 изображены результаты исследования корней данного уравнения, больших -1 (а также для случая $a=0$).

Теперь исследуем корни уравнения, меньшие —1. Для таких корней $x+1<0$, и данное уравнение принимает вид

$$-x^2-x+a=0, \text{ или } x^2+x-a=0.$$

Теперь надо исследовать, когда это уравнение имеет действительные корни, меньшие —1. Прежде всего должно выполняться условие

$$1+4a\geqslant 0, \text{ или } a\geqslant -\frac{1}{4}.$$

При $a=-\frac{1}{4}$ уравнение принимает вид $x^2+x+\frac{1}{4}=0$ и имеет корни $x_1=x_2=-\frac{1}{2}$, бо́льшие —1. Будем считать, что $a>-\frac{1}{4}$. Тогда корни уравнения $x^2+x-a=0$ действительны и различны. Оба корня будут меньше —1, если выполняются условия

$$(x^2+x-a)_{x=-1}>0, \quad (2x+1)_{x=-1}>0,$$

что не имеет места. Далее, число —1 заключено между корнями уравнения $x^2+x-a=0$ тогда и только тогда, когда $(x^2+x-a)_{x=-1}<0$, или $a>0$.

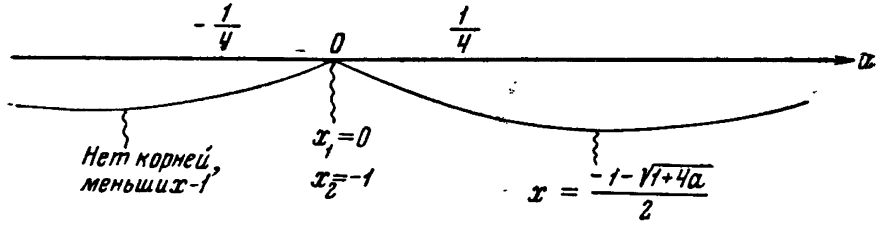

Рис. 21

Итак, в случае $a>0$ корни уравнения $x^2+x-a=0$ действительны, различны и число —1 заключено между ними. Корнем данного уравнения будет меньший корень, т. е.

$$x=\frac{-1-\sqrt{1+4a}}{2}.$$

На рис. 21 изображены результаты исследования наличия корней данного уравнения, меньших —1.

Итог: если $a<0$, то данное уравнение имеет один корень

$$x_1=\frac{-1+\sqrt{1-4a}}{2}.$$

Если $a=0$, то данное уравнение имеет два корня:

$$x_1=0, \quad x_2=-1.$$

Если $0<a<\frac{1}{4}$, то данное уравнение имеет три корня:

$$x_1=\frac{-1+\sqrt{1-4a}}{2},\quad x_2=\frac{-1-\sqrt{1-4a}}{2},\quad x_3=\frac{-1-\sqrt{1+4a}}{2}.$$

Если $a=\frac{1}{4}$, то данное уравнение имеет два корня:

$$x_1=-\frac{1}{2},\quad x_2=\frac{-1-\sqrt{2}}{2}.$$

Если $a>\frac{1}{4}$, то данное уравнение имеет один корень

$$x_1=\frac{-1-\sqrt{1+4a}}{2}.$$

Итог всех исследований дан на рис. 22.

Замечание. Изложенное решение показывает применение общей теоремы, сформулированной перед изложением решения. Эта теорема позволяет решить много подобных задач, где прихо-

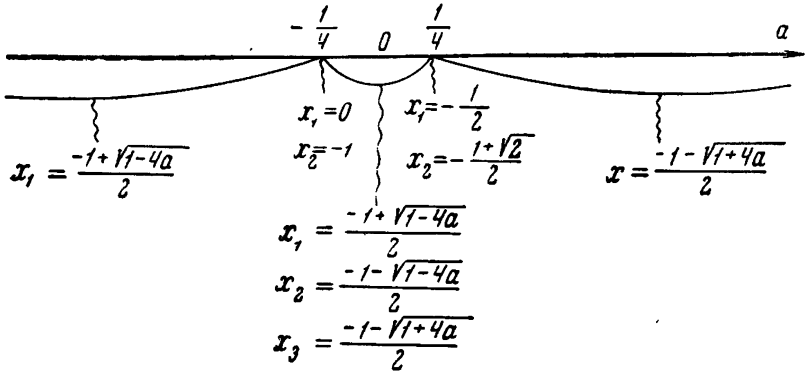

Рис. 22.

дится исследовать расположение действительного числа относительно действительных корней квадратного уравнения. Если не ставить цели показать применение общего метода, то эту задачу можно решить и короче, например так: полагая $x+1=z$, приведем данное уравнение к виду

$$(z-1)|z|+a=0,$$

и вопрос сведется к отысканию положительных корней уравнения $z^2-z+a=0$ и отрицательных корней уравнения $z^2-z-a=0$ (конечно, надо еще рассмотреть случай $a=0$). Это исследование также достаточно объемно, однако не придется применять указанную выше общую теорему. Исследование предлагается провести читателю самостоятельно.

Можно произвести и такую замену переменного:

$$x = -\frac{1}{2} + z;$$

тогда данное уравнение примет вид

$$\left(z-\frac{1}{2}\right)\left|z+\frac{1}{2}\right|+a=0,$$

а это уравнение эквивалентно следующим двум смешанным системам:

$$\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z+\frac{1}{2}\right)+a=0, \quad z+\frac{1}{2}\geqslant 0 \qquad \text{и} \qquad -\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z+\frac{1}{2}\right)+a=0, \quad z+\frac{1}{2}<0,$$

или

$$z^2=\frac{1}{4}-a, \quad z\geqslant -\frac{1}{2} \qquad \text{и} \qquad z^2=\frac{1}{4}+a, \quad z<-\frac{1}{2}.$$

Таким образом, надо решить вопросы: при каком условии уравнение $z^2=\frac{1}{4}-a$ имеет действительные корни, не меньшие $-\frac{1}{2}$, и при каком условии уравнение $z^2=\frac{1}{4}+a$ имеет действительные корни, меньшие $-\frac{1}{2}$. Необходимо найти эти корни. Значения x определяются затем из равенства $x=-\frac{1}{2}+z$. Это исследование также предоставляется читателю.

В тех случаях, когда требуется найти только действительные корни уравнения (или тогда, когда оно имеет только действительные корни), интересно дать геометрическую интерпретацию решению. Остановимся на этом подробно (в применении к данному примеру). Для этого построим график функции

$$y = x|x+1|.$$

Если $x\leqslant -1$, то уравнение принимает вид

$$y=-x^2-x.$$

Графиком является дуга AB параболы с вершиной в точке $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$, пересекающая ось Ox в двух точках $B(-1, 0)$ и $O(0, 0)$. Повторяем, в силу условия $x\leqslant -1$ берется только ду-

га $\overset{\smile}{AB}$ параболы, соответствующая всем ее точкам с абсциссами $x \leqslant -1$.

Если $x \geqslant -1$, то уравнение $y = x|x+1|$ принимает вид

$$y = x^2 + x.$$

Графиком является дуга $BC\overset{\smile}{O}D$ параболы с вершиной в точке $C\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$. Таким образом, графиком функции $y = x|x+1|$ является линия $ABCOD$, состоящая из двух дуг $\overset{\smile}{AB}$ и $BC\overset{\smile}{O}D$ двух парабол, уравнения которых соответственно таковы:

$$y = -x^2 - x \quad \text{и} \quad y = x^2 + x.$$

Данное уравнение

$$x|x+1| + a = 0$$

теперь можно переписать так:

$$y + a = 0, \quad \text{или} \quad y = -a;$$

таким образом, вопрос сводится к отысканию абсцисс точек пересечения построенного графика $ABCOD$ функции $y = x|x+1|$ с пря-

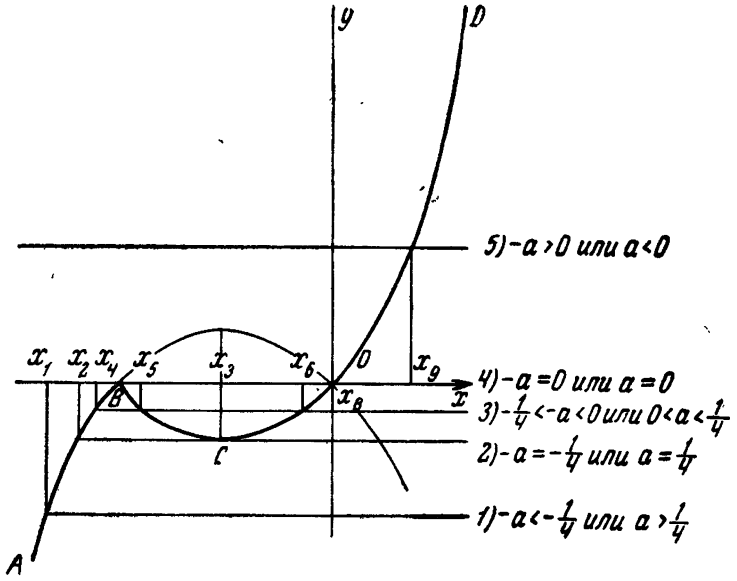

Рис. 23

мой $y = -a$, параллельной оси Ox (и совпадающей с осью Ox в случае $a = 0$). Теперь ясно, что следует рассмотреть пять случаев положения прямой $y = -a$ (рис. 23).

1) Если $-a < -\frac{1}{4}$, т. е. $a > \frac{1}{4}$, то прямая $y = -a$ пересекает только дугу $\overset{\smile}{AB}$ параболы $y = -x^2 - x$, и данное уравнение имеет

один корень: это меньший корень уравнения $-x^2-x=-a$, или $x^2+x-a=0$, т. е.

$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{1+4a}}{2}.$$

2) Если $-a=-\frac{1}{4}$, т. е. $a=\frac{1}{4}$, то прямая $y=-a$ (т. е. $y=-\frac{1}{4}$) пересекает дугу $\overset{\smile}{AB}$ и касается в точке C дуги $\overset{\smile}{BCOD}$. Уравнение имеет два корня: меньший корень уравнения $-x^2-x=-\frac{1}{4}$, или $x^2+x-\frac{1}{4}=0$, т. е.

$$x_2 = \frac{-1-\sqrt{2}}{2} \text{ и еще } x_3 = -\frac{1}{2}.$$

3) Если $-\frac{1}{4}<-a<0$, т. е. $0<a<\frac{1}{4}$, то прямая $y=-a$ пересекает дугу $\overset{\smile}{AB}$ в одной точке, а дугу $\overset{\smile}{BCOD}$ в двух точках. Данное уравнение имеет три корня: меньший корень уравнения

$$-x^2-x=-a, \text{ т. е. } x_4=\frac{-1-\sqrt{1+4a}}{2} \text{ и еще}$$

$$x_5 = \frac{-1-\sqrt{1-4a}}{2}, \quad x_6 = \frac{-1+\sqrt{1-4a}}{2},$$

где x_5 и x_6 — корни уравнения $x^2+x=-a$.

4) Если $a=0$, то прямая $y=-a$, т. е. ось Ox пересекает график функции в двух точках B и C; данное уравнение имеет два корня:

$$x_7 = -1, \quad x_8 = 0.$$

5) Если, наконец, $-a>0$, т. е. $a<0$, то прямая $y=-a$ пересекает график $ABCOD$ только в одной точке; данное уравнение имеет только один корень x_9 — это бóльший корень уравнения $x^2+x=-a$, т. е.

$$x_9 = \frac{-1+\sqrt{1-4a}}{2}.$$

Замечание. В приведенном геометрическом решении данной задачи пересечение прямой $y=-a$ с построенным графиком устанавливалось наглядными соображениями. Однако это должно быть доказано аналитически. Отметим прежде всего следующее: если a, b, c — любые действительные числа, причем $a>0$, то любая прямая $y=\lambda$ пересекает график функции

$$y = ax^2 + bx + c$$

в двух точках тогда и только тогда, когда

$$\lambda \geqslant \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Эти две точки различны, если $\lambda > \frac{4ac - b^2}{4a}$, и совпадают, если $\lambda = \frac{4ac - b^2}{4a}$ (в этом случае прямая $y = \lambda$ касается параболы $y = ax^2 + bx + c$ в ее вершине).

В самом деле, решая уравнение

$$ax^2 + bx + c = \lambda,$$

получим

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a(c - \lambda)}}{2a}.$$

Корни x_1 и x_2 будут действительны и различны, если $b^2 - 4ac + 4a\lambda > 0$, т. е. $(a > 0)$ если $\lambda > \frac{4ac - b^2}{4a}$. Корни x_1 и x_2 будут равны между собой тогда и только тогда, когда $b^2 - 4ac + 4a\lambda = 0$, т. е. $\lambda = \frac{4ac - b^2}{4a}$.

Аналогично доказывается, что в случае $a < 0$ прямая $y = \lambda$ пересекает график функции $y = ax^2 + bx + c$ в двух различных точках тогда и только тогда, когда $\lambda < \frac{4ac - b^2}{4a}$, и касается этого графика в одной точке (в вершине параболы) в случае

$$\lambda = \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

В более сложных случаях (если, например, строятся графики функций вида $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, или $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ и т. д.) геометрические рассуждения, подобные проведенным выше, будут лишь интерпретацией, так как даже если проведено исследование функции на возрастание и убывание, останется не доказанным, проходит ли эта функция через все промежуточные значения на сегменте, на котором она монотонна. Без такого доказательства пересечение прямой $y = \lambda$ с построенным графиком останется недоказанным. Наиболее естественно здесь было бы обратиться к известному свойству непрерывной функции (проходить через все промежуточные значения); однако даже само понятие непрерывности функции выходит за рамки средней школы. Для целой рациональной функции $y = ax^2 + bx + c$ второй степени, как мы видим, указанное свойство удается доказать, притом *эффективно*, т. е. указать те значения x, при которых функция $y = ax^2 + bx + c$ принимает заданное значение из данного полуинтервала $\left[\frac{4ac - b^2}{4a}, +\infty\right)$ (в случае $a > 0$), или $\left(-\infty, \frac{4ac - b^2}{4a}\right]$ (в случае $a < 0$).

7. Перепишем данное неравенство в виде

$$\frac{2x}{\sqrt{2x+9}} < \frac{2x}{\sqrt{1+2x}+1},$$

или

$$x(\sqrt{1+2x} - \sqrt{2x+9} + 1) < 0.$$

Отметим, что радикалы будут действительными числами тогда и только тогда, когда $x \geqslant -\frac{1}{2}$. Рассмотрим два случая: 1) $-\frac{1}{2} \leqslant x < 0$, тогда $\sqrt{1+2x} - \sqrt{2x+9} + 1 > 0$; 2) $x > 0$, тогда $\sqrt{1+2x} - \sqrt{2x+9} + 1 < 0$.

1) Решим неравенство $\sqrt{1+2x} - \sqrt{2x+9} + 1 > 0$, или

$$\sqrt{1+2x} + 1 > \sqrt{2x+9}.$$

Оно эквивалентно следующему:

$$1 + 2x + 2\sqrt{1+2x} + 1 > 2x + 9,$$

или

$$2\sqrt{1+2x} > 7;$$

отсюда

$$x > \frac{45}{8},$$

а это противоречит условию

$$-\frac{1}{2} \leqslant x < 0.$$

2) Решая неравенство

$$\sqrt{1+2x} - \sqrt{2x+9} + 1 < 0,$$

получим $x < \frac{45}{8}$, но так как во втором случае мы считаем, что $x > 0$, то все решения данного неравенства

$$0 < x < \frac{45}{8}.$$

8. Перепишем данную систему так:

$$\sin(x-y) = \frac{3}{2}\sin(x+y) + \frac{3}{2}\sin(x-y) - 1,$$

$$\sin(x+y) = \sin(x-y) - \sin(x+y).$$

Отсюда находим

$$\sin(x+y)=\frac{2}{5},\quad \sin(x-y)=\frac{4}{5},$$

следовательно,

$$x+y=k\pi+(-1)^k\arcsin\frac{2}{5},$$

$$x-y=n\pi+(-1)^n\arcsin\frac{4}{5},$$

значит,

$$x=\frac{k+n}{2}\pi+\frac{1}{2}(-1)^k\arcsin\frac{2}{5}+\frac{1}{2}(-1)^n\arcsin\frac{4}{5},$$

$$y=\frac{k-n}{2}\pi+\frac{1}{2}(-1)^k\arcsin\frac{2}{5}-\frac{1}{2}(-1)^n\arcsin\frac{4}{5},$$

где k и n — любые целые числа.

Замечание. Пользуясь формулами

$$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\sin y\cos x,$$

$$\sin(x-y)=\sin x\cos y-\sin y\cos x,$$

можно найти (решая данную систему) сначала $\sin x\cos y$ и $\sin y\cos x$, а затем $\sin(x+y)$ и $\sin(x-y)$.

9. Первый способ решения. Проведем через точку A диаметр $APOQ$ данной окружности (рис. 24). Полагая $\angle AOB=\alpha$, $\angle AOC=\beta$, находим $\angle BQP=\frac{\alpha}{2}$, $\angle CQP=\frac{\beta}{2}$, так что искомое произведение равно

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\frac{PB\cdot PC}{QB\cdot QC}=\frac{\text{пл. }\triangle BPC}{\text{пл. }\triangle BQC},$$

так как $\angle BPC=\angle BQC$. Но треугольники BPC и BQC имеют общее основание BC, значит, их площади относятся как расстояния от точек P и Q до прямой ABC; но отношение этих расстояний равно отношению $AP=a-r$ к $AQ=a+r$. Итак,

$$\operatorname{tg}\frac{\angle AOB}{2}\operatorname{tg}\frac{\angle AOC}{2}=\frac{a-r}{a+r}.$$

Второй способ решения. Пусть D — проекция точки O на прямую ABC.

Применяя те же обозначения, будем иметь

$$\angle BOD=\frac{\beta-\alpha}{2},\quad \angle OAD=\frac{\pi-\beta-\alpha}{2}$$

и, значит,

$$\cos\frac{\beta-\alpha}{2}=\frac{OD}{r},\quad \frac{OD}{a}=\sin\angle OAD=\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Отсюда (почленно делим два последних равенства)

$$\frac{a}{r}=\frac{\cos\frac{\beta-\alpha}{2}}{\cos\frac{\beta+\alpha}{2}},$$

значит (производная пропорция!),

$$\frac{a-r}{a+r}=\frac{\cos\frac{\beta-\alpha}{2}-\cos\frac{\beta+\alpha}{2}}{\cos\frac{\beta-\alpha}{2}+\cos\frac{\beta+\alpha}{2}}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}.$$

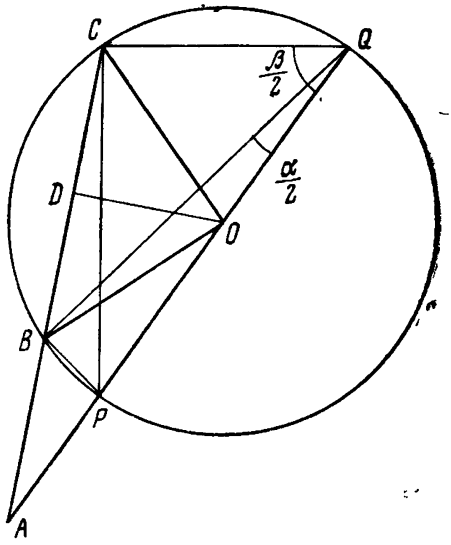

Рис. 24

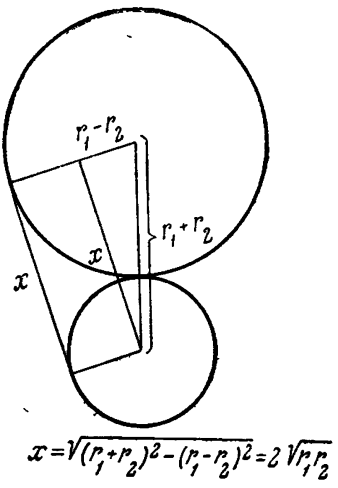

Рис. 25

Третий способ решения. Так как $\angle AOB=\alpha$, $\angle OAB=\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha+\beta}{2}$ и, значит, $\angle ABO=\frac{\pi}{2}+\frac{\beta-\alpha}{2}$, то из $\triangle ABO$ по теореме синусов имеем

$$\frac{r}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{a}{\cos\frac{\beta-\alpha}{2}}$$

и далее, как во втором способе решения.

10. Сначала заметим, что если две сферы внешне касаются друг друга и некоторой плоскости, то расстояние между точками касания равно $2\sqrt{r_1r_2}$, где r_1 и r_2 — радиусы сфер (рис. 25).

Обозначая через a, b и c длины сторон BC, CA и AB данного треугольника, а через r_1, r_2, r_3 радиусы сфер, касающихся плоскости треугольника ABC соответственно в точках A, B и C (причем каждая сфера касается еще внешним образом двух других), на основании сделанного замечания будем иметь

$$a = 2\sqrt{r_2 r_3},\ b = 2\sqrt{r_3 r_1},\ c = 2\sqrt{r_1 r_2}.$$

Перемножая почленно эти уравнения, получим

$$abc = 8 r_1 r_2 r_3;$$

отсюда

$$r_1 r_2 r_3 = \frac{abc}{8},$$

а так как

$$r_2 r_3 = \frac{a^2}{4},\ r_3 r_1 = \frac{b^2}{4},\ r_1 r_2 = \frac{c^2}{4},$$

то

$$r_1 = \frac{bc}{2a},\ r_2 = \frac{ca}{2b},\ r_3 = \frac{ab}{2c}.$$

Из треугольника ABC по теореме синусов имеем

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin (A+B)},$$

откуда

$$a = \frac{c \sin A}{\sin (A+B)},\ b = \frac{c \sin B}{\sin (A+B)},$$

значит, окончательно

$$r_1 = \frac{c \sin B}{2 \sin A},\ r_2 = \frac{c \sin A}{2 \sin B},\ r_3 = \frac{c \sin A \sin B}{2 \sin^2 (A+B)}.$$

Решение варианта 3

11. Так как $\sqrt{|x|+1} - \sqrt{|x|} > 0$ при всех значениях x, то данное уравнение не имеет решений, если $a \leqslant 0$. Будем считать, что $a > 0$.

Перепишем данное уравнение в виде

$$\sqrt{|x|+1} = \sqrt{|x|} + a.$$

Так как при любом значении x (и $a > 0$) левая и правая части — положительные числа, то это уравнение эквивалентно тому, которое мы получим, возводя обе части последнего уравнения в квадрат:

$$|x| + 1 = |x| + 2a\sqrt{|x|} + a^2,$$

или

$$2a\sqrt{|x|} = 1 - a^2.$$

Так как при любом значении x (и $a>0$) левая часть неотрицательна, то уравнение не имеет решений, если $a>1$. Будем считать, что $0<a\leqslant 1$. Тогда последнее уравнение эквивалентно уравнению

$$4a^2|x| = (1-a^2)^2,$$

откуда

$$|x| = \frac{(1-a^2)^2}{4a^2}$$

и, следовательно,

$$x = \pm\frac{(1-a^2)^2}{4a^2}. \qquad (1)$$

Итак, если $0<a<1$, то данное уравнение имеет два корня (формула (1)). Если $a=1$, то данное уравнение имеет один корень $x=0$.

12. Перепишем данную систему в виде

$$2\cos^2\frac{x}{2} - 1 + 2\cos^2\frac{y}{2} - 1 = 1,$$

$$\cos\frac{x}{2} + \cos\frac{y}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} - 1,$$

или

$$\cos^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{y}{2} = \frac{3}{2},$$

$$\cos\frac{x}{2} + \cos\frac{y}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} - 1,$$

или

$$\left(\cos\frac{x}{2} + \cos\frac{y}{2}\right)^2 - 2\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2} = \frac{3}{2},$$

$$\cos\frac{x}{2} + \cos\frac{y}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} - 1.$$

Эта система уравнений эквивалентна следующей:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)^2 - 2\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2} = \frac{3}{2},$$

$$\cos\frac{x}{2} + \cos\frac{y}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} - 1,$$

или после упрощений

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}=-\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\cos\frac{x}{2}+\cos\frac{y}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}-1.$$

Таким образом, $\cos\frac{x}{2}$ и $\cos\frac{y}{2}$ являются корнями квадратного уравнения

$$\lambda^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)\lambda-\frac{\sqrt{2}}{2}=0$$

(если, конечно, оба корня этого уравнения по модулю не превосходят 1). Решая уравнение, получим

$$\lambda_{1,2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)\pm\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}-\sqrt{2}+1\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)\pm\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right),$$

$$\lambda_1=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad\lambda_2=-1.$$

Итак,

$$\cos\frac{x}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2},\ \cos\frac{y}{2}=-1,\ \text{или}\ \cos\frac{x}{2}=-1,\ \cos\frac{y}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Следовательно,

$$x=4k\pi\pm\frac{\pi}{2},\quad y=2(2n+1)\pi$$

и

$$x=2(2m+1)\pi,\quad y=4s\pi\pm\frac{\pi}{2},$$

где k, n, m, s — произвольные целые числа.

13. При решении уравнений и неравенств, содержащих одновременно $\sin 2x$ и $\sin x+\cos x$, или $\sin 2x$ и $\sin x-\cos x$, полезно ввести новое неизвестное

$$y=\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{2}}=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

и соответственно

$$y=\frac{\sin x-\cos x}{\sqrt{2}}=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right).$$

В первом случае

$$\sin 2x = (\sin x + \cos x)^2 - 1 = 2y^2 - 1;$$

во втором

$$\sin 2x = 1 - (\sin x - \cos x)^2 = 1 - 2y^2.$$

Применяя это соображение к решению данного неравенства, т. е. полагая

$$y = \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{2}} = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right),$$

получим

$$\sin 2x = 2y^2 - 1,$$

$$3(2y^2 - 1) > y\sqrt{2} + 1,$$

или $6y^2 - y\sqrt{2} - 4 > 0$, причем $-1 \leqslant y \leqslant 1$.

Решая уравнение

$$6y^2 - y\sqrt{2} - 4 = 0,$$

получим

$$y_1 = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \quad y_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Неравенства $6y^2 - y\sqrt{2} - 4 > 0$, $-1 \leqslant y \leqslant 1$ выполняются одновременно в случае

$$-1 \leqslant y < -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{и} \quad \frac{2\sqrt{2}}{3} < y \leqslant 1,$$

или

$$-1 \leqslant \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) < -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{и} \quad \frac{2\sqrt{2}}{3} < \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leqslant 1.$$

Для нахождения всех значений x, удовлетворяющих этим условиям, полезно сначала найти на единичной окружности (тригонометрический круг) точки, соответствующие углам, величины которых удовлетворяют этим соотношениям. Пусть (O) — единичная окружность (рис. 26), радиус которой равен 1, PP_1 и MM_1 — два ее взаимно перпендикулярных диаметра. На продолжении отрезка PM за точку M откладываем отрезок $MS = PM$. Тогда $PS = 2\sqrt{2}$. Делим отрезок PS на три равные части: $PQ = QR = RS$; тогда $PQ = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. Откладываем на радиусе OP от точки O отрезок $ON = PQ$ и через точку N проводим прямую, перпендикулярную

прямой PP_1. Пусть A и B — точки пересечения построенной прямой с единичной окружностью. Тогда $\angle MOB = \arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\angle MOA = \pi - \arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3}$ и все решения неравенства $\frac{2\sqrt{2}}{3} < \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leqslant 1$, соответствующие всем точкам открытой дуги $\overset{\smile}{AB}$ (т. е. точки A и B исключаются), таковы:

$$2k\pi + \arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3} < x + \frac{\pi}{4} < (2k+1)\pi - \arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3},$$

т. е.

$$2k\pi - \frac{\pi}{4} + \arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3} < x < 2k\pi + \frac{3\pi}{4} - \arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3}. \quad (1)$$

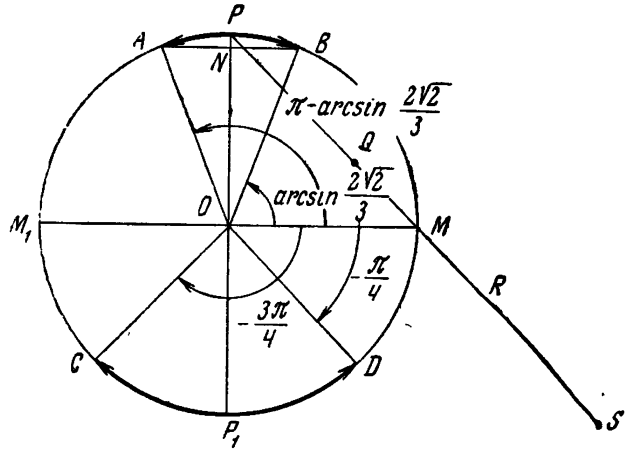

Рис. 26

Аналогично находим все решения неравенства

$$-1 \leqslant \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) < -\frac{\sqrt{2}}{2}:$$

$$2n\pi - \frac{3\pi}{4} < x + \frac{\pi}{4} < 2n\pi - \frac{\pi}{4},$$

откуда

$$2n\pi - \pi < x < 2n\pi - \frac{\pi}{2}. \quad (2)$$

Все решения данного неравенства даются неравенствами (1) и (2), где k и n принимают все целые значения.

14. Обозначим расстояние от центра окружности до хорды AB через λ:

$$\lambda = OC = r\cos\frac{\alpha}{2}$$ (рис. 27).

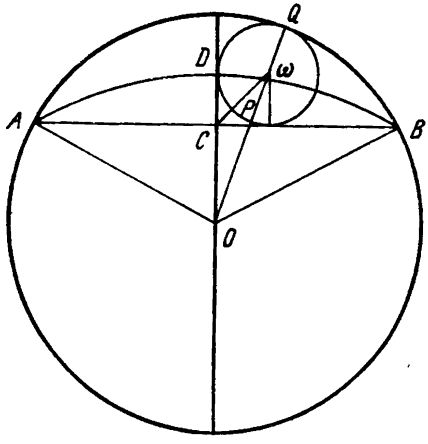

Рис. 27

Проведем прямую через точку O и через центр искомой окружности. Пусть эта прямая пересечет искомую окружность в точках P и Q.

Тогда

$$OP \cdot OQ = OD^2,$$

или

$$(r - 2x)\,r = (\lambda + x)^2,$$

или

$$x^2 + 2(r + \lambda)x + \lambda^2 - r^2 = 0.$$

Так как $\lambda < r$ $(OC < OB)$, то корни этого уравнения действительные и разных знаков. В качестве x следует взять положительный корень

$$x = -(r + \lambda) + \sqrt{r^2 + 2\lambda r + \lambda^2 - \lambda^2 + r^2},$$

или

$$x = \sqrt{2r(r + \lambda)} - (r + \lambda). \qquad (1)$$

Подставляя сюда $\lambda = r\cos\frac{\alpha}{2}$, получим

$$x = \sqrt{2r \cdot 2r\cos^2\frac{\alpha}{4}} - 2r\cos^2\frac{\alpha}{4} =$$

$$= 2r\cos\frac{\alpha}{4}\left(1 - \cos\frac{\alpha}{4}\right) = 4r\cos\frac{\alpha}{4}\sin^2\frac{\alpha}{8}.$$

Замечание. Формула (1) имеет следующую геометрическую интерпретацию, позволяющую построить искомую окружность с помощью циркуля и линейки: пусть R — точка данной окружности, лежащая на продолжении отрезка CO за точку O. Тогда

$$RB^2 = RC^2 + CB^2 = (r + \lambda)^2 + OB^2 - OC^2 =$$

$$= (r + \lambda)^2 + r^2 - \lambda^2 = 2r(r + \lambda),$$

откуда

$$RB = \sqrt{2r(r + \lambda)}.$$

Так как

$$RC = r + \lambda,$$

то радиус x искомой окружности равен разности $RB—RC$, иначе говоря

$$RB = RD.$$

Таким образом, для построения центра по искомой окружности строим окружность с центром в точке R и радиусом RB. Пусть D— внутренняя точка данной окружности, в которой построенная окружность пересекает диаметр данной окружности, проходящей через точку R. Центр ω искомой окружности есть точка пересече-

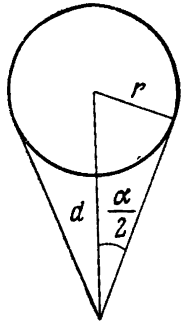

Рис. 28

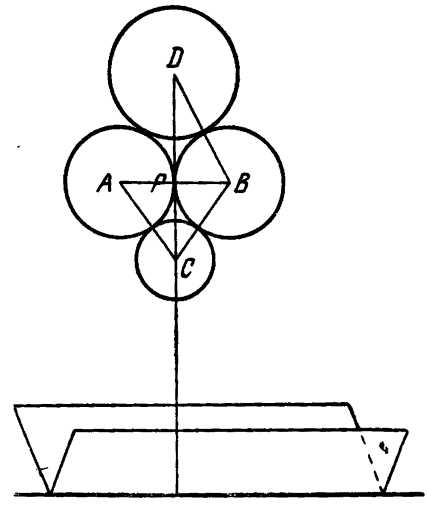

Рис. 29

ния прямой, проходящей через точку D перпендикулярно прямой DR с биссектрисой угла DCB.

Читателю рекомендуется доказать правильность этого построения геометрически (это очень трудный вопрос).

15. Первый способ решения. Если сфера радиуса r касается граней двугранного угла, величина которого равна α, то расстояние от центра сферы до ребра двугранного угла равно (рис. 28)

$$d = \frac{r}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Далее, существуют две сферы, каждая из которых касается двух данных сфер и граней двугранного угла. Проведем плоскость через ребро данного двугранного угла, центры двух данных сфер (радиуса r) и центры искомых сфер (рис. 29). Обозначим через x

радиус любой из искомых сфер. Так как расстояние от центра сферы радиуса x, касающейся граней двугранного угла величины α, до ребра этого двугранного угла равно

$$\frac{x}{\sin\frac{\alpha}{2}},$$

то расстояние от центра C меньшей из искомых сфер до точки P касания данных сфер равно

$$\frac{r-x}{\sin\frac{\alpha}{2}},$$

а расстояние от центра D бо́льшей из искомых сфер до точки P равно

$$\frac{x-r}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Из прямоугольных треугольников CPB и BPD получаем одно и то же соотношение:

$$\frac{(x-r)^2}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}+r^2=(r+x)^2,$$

или

$$x^2\cos^2\frac{\alpha}{2}-2r\left(1+\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)x+r^2=0,$$

откуда

$$x_{1,2}=r\frac{1+\sin^2\frac{\alpha}{2}\pm\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{3+\sin^2\frac{\alpha}{2}}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}},$$

или

$$x_{1,2}=r\left(1+2\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\pm\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\sqrt{3+4\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}\right).$$

Второй способ решения. Если сферы радиуса r касаются друг друга в точке P, а сфера радиуса x с центром C касается их обоих, то (рис. 30)

$$CP=\sqrt{CM\cdot CN}=\sqrt{x(x+2r)}=\sqrt{x^2+2rx}.$$

Спроектируем две данные сферы, двугранный угол и две искомые сферы в плоскость, проходящую через прямую CPD перпендикулярно ребру данного двугранного угла (рис. 31). Так как данные сферы с искомыми имеют общие точки (точки касания), то при

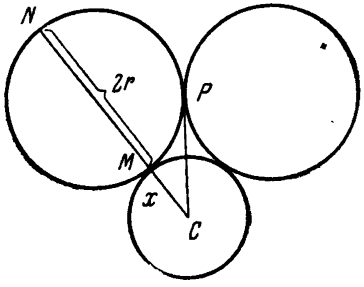

Рис. 30

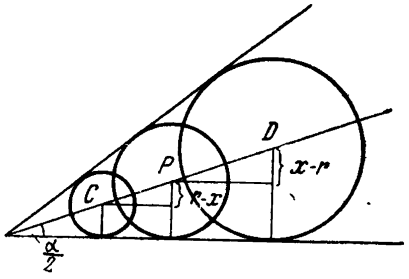

Рис. 31

указанном проектировании искомые сферы спроектируются в окружности, пересекающие окружность, в которую спроектируются данные сферы. Теперь из рис. 31 находим

$$|x-r| = \sqrt{2rx+x^2}\sin\frac{\alpha}{2},$$

или

$$(x-r)^2 = (x^2+2rx)\sin^2\frac{\alpha}{2},$$

а это уравнение, которое было получено выше.

Замечание. Если α стремится к π (развернутый двугранный угол), то радиус

$$x_1 = r\,\frac{1+\sin^2\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{3+\sin^2\frac{\alpha}{2}}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}$$

неограниченно возрастает. Что касается x_2:

$$x_2 = r\,\frac{1+\sin^2\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{3+\sin^2\frac{\alpha}{2}}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}},$$

го преобразуя его

$$x_2 = r\frac{\left(1+\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)^2 - \sin^2\frac{\alpha}{2}\left(3+\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos^2\frac{\alpha}{2}\left(1+\sin^2\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{3+\sin^2\frac{\alpha}{2}}\right)} =$$

$$= \frac{r}{1+\sin^2\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{3+\sin^2\frac{\alpha}{2}}},$$

заключаем, что x_2 убывает и стремится к $\frac{r}{4}$. Случай $\alpha=\pi$ соответствует следующей задаче: найти радиус окружности, касающейся двух равных касающихся между собой окружностей и их общей внешней касательной. Из рис. 32 находим

$$AB = 2\sqrt{xr} = r, \text{ откуда } x = \frac{r}{4}.$$

Таким образом, в данной нам задаче радиусы обеих сфер больше $\frac{r}{4}$. Установив это, можно еще раз доказать, что окружности, являющиеся проекциями искомых сфер в плоскость, перпендикулярную ребру данного двугранного угла, пересекают окружность, являющуюся проекцией в ту же плоскость данных сфер (см. рис. 31). Для этого надо доказать, что

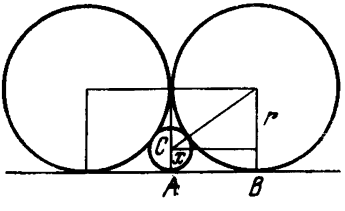

Рис. 32

$$|r-x| < \sqrt{2rx+x^2} < r+x,$$

или

$$(r-x)^2 < 2rx+x^2 < (r+x)^2.$$

Неравенство $2rx+x^2<(r+x)^2$, очевидно, выполняется. Что касается неравенства

$$(r-x)^2 < 2rx+x^2,$$

то оно приводится к виду $x>\frac{r}{4}$, а это по доказанному выше имеет место.

Решение варианта 4

16. Перепишем данное уравнение следующим образом:

$$|2\sin^2 x - 1| = |\sin^2 x - a|.$$

1) Предположим, что $\sin^2 x > \frac{1}{2}$, $\sin^2 x > a$; тогда данное уравнение эквивалентно смешанной * системе

$$\sin^2 x > \frac{1}{2},\ \sin^2 x > a,\ 2\sin^2 x - 1 = \sin^2 x - a,$$

или

$$\sin^2 x > \frac{1}{2},\ \sin^2 x > a,\ \sin^2 x = 1 - a. \qquad (A)$$

Таким образом, должны выполняться неравенства

$$1 - a > \frac{1}{2},\ 1 - a > a, \text{ откуда } a < \frac{1}{2}.$$

Кроме того,

$$0 \leqslant 1 - a \leqslant 1,$$

откуда

$$0 \leqslant a < \frac{1}{2}.$$

Итак, все соотношения (А) будут выполнены, если

$$0 \leqslant a < \frac{1}{2}.$$

При этом условии данное уравнение имеет четыре корня **:

$$\begin{gathered} x_1 = \arcsin\sqrt{1-a},\ x_2 = \pi - \arcsin\sqrt{1-a}, \\ x_3 = \pi + \arcsin\sqrt{1-a},\ x_4 = 2\pi - \arcsin\sqrt{1-a}, \end{gathered} \qquad (1)$$

если $0 < a < \frac{1}{2}$, и два корня:

$$x_1 = \frac{\pi}{2},\ x_2 = \frac{3\pi}{2}, \qquad (2)$$

если $a = 0$.

2) Предположим, что $\sin^2 x < \frac{1}{2}$, $\sin^2 x < a$; тогда данное уравнение эквивалентно следующей смешанной системе:

$$\sin^2 x < \frac{1}{2},\ \sin^2 x < a,\ \sin^2 x = 1 - a.$$

Из неравенств $1 - a < \frac{1}{2}$, $1 - a < a$ находим $a > \frac{1}{2}$, а из соотношений $0 \leqslant 1 - a \leqslant 1$ находим $0 \leqslant a \leqslant 1$. Итак,

$$\frac{1}{2} < a \leqslant 1.$$

---

* Смешанной называется система, состоящая из уравнений и неравенств.

** Речь все время идет о корнях, лежащих на сегменте $[0, 2\pi]$.

При этих условиях данное уравнение имеет четыре корня:

$$x_1 = \arcsin\sqrt{1-a},\ x_2 = \pi - \arcsin\sqrt{1-a},$$
$$x_3 = \pi + \arcsin\sqrt{1-a},\ x_4 = 2\pi - \arcsin\sqrt{1-a}, \tag{3}$$

если $\frac{1}{2} < a < 1$, и три корня:

$$x_1 = 0,\ x_2 = \pi,\ x_3 = 2\pi, \tag{4}$$

если $a = 1$.

3) Предположим, что $\sin^2 x > \frac{1}{2}$, а $\sin^2 x < a$; тогда данное уравнение эквивалентно следующей смешанной системе:

$$\sin^2 x > \frac{1}{2},\ \sin^2 x < a,\ 2\sin^2 x - 1 = a - \sin^2 x,$$

или

$$\sin^2 x > \frac{1}{2},\ \sin^2 x < a,\ \sin^2 x = \frac{1+a}{3}.$$

Из неравенств

$$\frac{1+a}{3} > \frac{1}{2} \text{ и } \frac{1+a}{3} < a$$

находим $a > \frac{1}{2}$, а из неравенств

$$0 \leqslant \frac{1+a}{3} \leqslant 1$$

находим $-1 \leqslant a \leqslant 2$. Итак, если

$$\frac{1}{2} < a \leqslant 2,$$

то данное уравнение имеет четыре корня:

$$x_1 = \arcsin\sqrt{\frac{1+a}{3}},\ x_2 = \pi - \arcsin\sqrt{\frac{1+a}{3}},$$
$$x_3 = \pi + \arcsin\sqrt{\frac{1+a}{3}},\ x_4 = 2\pi - \arcsin\sqrt{\frac{1+a}{3}}, \tag{5}$$

это в случае $\frac{1}{2} < a < 2$. Если же $a = 2$, то уравнение имеет два корня:

$$x_1 = \frac{\pi}{2},\ x_2 = \frac{3\pi}{2}. \tag{6}$$

4) Предположим, что $\sin^2 x < \frac{1}{2}$, а $\sin^2 x > a$; тогда данное уравнение эквивалентно следующей системе:

$$\sin^2 x < \frac{1}{2},\ \sin^2 x > a,\ \sin^2 x = \frac{1+a}{3}.$$

Из неравенств

$$\frac{1+a}{3} < \frac{1}{2},\ \frac{1+a}{3} > a$$

находим $a < \frac{1}{2}$, а из неравенств $0 \leqslant \frac{1+a}{3} \leqslant 1$, как и выше, находим $-1 \leqslant a \leqslant 2$.

Итак, если $-1 \leqslant a < \frac{1}{2}$, то данное уравнение имеет четыре корня:

$$\begin{gathered} x_1 = \arcsin \sqrt{\frac{1+a}{3}},\ x_2 = \pi - \arcsin \sqrt{\frac{1+a}{3}}, \\ x_3 = \pi + \arcsin \sqrt{\frac{1+a}{3}},\ x_4 = 2\pi - \arcsin \sqrt{\frac{1+a}{3}}, \end{gathered} \tag{7}$$

это в случае $-1 < a < \frac{1}{2}$; если же $a = -1$, то три корня:

$$x_1 = 0,\ x_2 = \pi,\ x_3 = 2\pi. \tag{8}$$

5) Заметим, что если $\sin^2 x = \frac{1}{2}$, то $a = \frac{1}{2}$, а если $\sin^2 x = a$, то $a = \frac{1}{2}$. Поэтому остается рассмотреть случай $a = \frac{1}{2}$. В этом случае данное уравнение принимает вид

$$|2\sin^2 x - 1| = \left|\sin^2 x - \frac{1}{2}\right|,$$

откуда

$$\sin^2 x = \frac{1}{2},$$

значит,

$$x_1 = \frac{\pi}{4},\ x_2 = \frac{3\pi}{4},\ x_3 = \frac{5\pi}{4},\ x_4 = \frac{7\pi}{4}.$$

Эти значения корней получаются из предыдущих (любой из первых четырех случаев), если в окончательных формулах положить $a = \frac{1}{2}$. Отметим, что соотношения (2), (4), (6) и (8) следуют соответственно из соотношений (1), (3), (5) и (7), если положить в них $a=0$, $a=1$, $a=2$, $a=-1$ (окончательный итог дан в таблице).

Таблица

Значения a	Корни уравнения
$a<-1$	корней нет
$a=-1$	$x_1=0,\ x_2=\pi,\ x_3=2\pi$
$-1<a<0$	$x_1=\arcsin\sqrt{\frac{1+a}{3}},\ x_2=\pi-\arcsin\sqrt{\frac{1+a}{3}},$ $x_3=\pi+\arcsin\sqrt{\frac{1+a}{3}},\ x_4=2\pi-\arcsin\sqrt{\frac{1+a}{3}}$
$a=0$	$x_1=\frac{\pi}{2},\ x_2=\frac{3\pi}{2},\ x_3=\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}},$ $x_4=\pi-\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}},\ x_5=\pi+\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}},$ $x_6=2\pi-\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$
$0<a<\frac{1}{2}$	$x_1=\arcsin\sqrt{1-a},\ x_2=\pi-\arcsin\sqrt{1-a},$ $x_3=\pi+\arcsin\sqrt{1-a},\ x_4=2\pi-\arcsin\sqrt{1-a},$ $x_5=\arcsin\sqrt{\frac{1+a}{3}},\ x_6=\pi-\arcsin\sqrt{\frac{1+a}{3}},$ $x_7=\pi+\arcsin\sqrt{\frac{1+a}{3}},\ x_8=2\pi-\arcsin\sqrt{\frac{1+a}{3}}$
$a=\frac{1}{2}$	$x_1=\frac{\pi}{4},\ x_2=\frac{3\pi}{4},\ x_3=\frac{5\pi}{4},\ x_4=\frac{7\pi}{4}$
$\frac{1}{2}<a<1$	$x_1=\arcsin\sqrt{1-a},\ x_2=\pi-\arcsin\sqrt{1-a},$ $x_3=\pi+\arcsin\sqrt{1-a},\ x_4=2\pi-\arcsin\sqrt{1-a},$ $x_5=\arcsin\sqrt{\frac{1+a}{3}},\ x_6=\pi-\arcsin\sqrt{\frac{1+a}{3}},$ $x_7=\pi+\arcsin\sqrt{\frac{1+a}{3}},\ x_8=2\pi-\arcsin\sqrt{\frac{1+a}{3}}$
$a=1$	$x_1=0,\ x_2=\pi,\ x_3=2\pi,$ $x_4=\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}},\ x_5=\pi-\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}},$ $x_6=\pi+\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}},\ x_7=2\pi-\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}$
$1<a<2$	$x_1=\arcsin\sqrt{\frac{1+a}{3}},\ x_2=\pi-\arcsin\sqrt{\frac{1+a}{3}},$ $x_3=\pi+\arcsin\sqrt{\frac{1+a}{3}},\ x_4=2\pi-\arcsin\sqrt{\frac{1+a}{3}}$
$a=2$	$x_1=\frac{\pi}{2},\ x_2=\frac{3\pi}{2}$
$a>2$	корней нет

17. Так как коэффициенты при x и y не пропорциональны, то данная система имеет и притом только одно решение:

$$x = \frac{k+16}{7},\ y = \frac{8-3k}{7}.$$

Остается решить систему неравенств

$$\frac{k+16}{7} > \frac{1}{k},\ \frac{8-3k}{7} > 0.$$

Из второго неравенства находим $k < \frac{8}{3}$. Первое неравенство перепишем в виде

$$\frac{k+16}{7} - \frac{1}{k} > 0, \tag{1}$$

или

$$\frac{k^2+16k-7}{k} > 0,$$

или

$$z = \frac{[k-(-8-\sqrt{71})]\,[k-(-8+\sqrt{71})]}{k} > 0.$$

Располагая корни числителя и знаменателя в порядке возрастания

$$-8-\sqrt{71},\ 0,\ -8+\sqrt{71},$$

заключаем, что все решения неравенства (1):

$$-8-\sqrt{71} < k < 0 \text{ и } k > -8+\sqrt{71}.$$

Но кроме этого должно быть выполнено неравенство $k < \frac{8}{3}$.

Так как

$$-8+\sqrt{71} < \sqrt{81} - 8 = 1 < \frac{8}{3},$$

то все значения k, удовлетворяющие условию задачи, таковы:

$$-8-\sqrt{71} < k < 0,\ \sqrt{71}-8 < k < \frac{8}{3}.$$

18. Преобразуем данное уравнение следующим образом:

$$2\cos x - 3\operatorname{tg} x + 4\sin x - 2 = 0,$$

$$\frac{2\cos^2 x - 3\sin x}{\cos x} + 2(2\sin x - 1) = 0,$$

$$\frac{2 - 2\sin^2 x - 3\sin x}{\cos x} + 2(2\sin x - 1) = 0,$$

$$-\frac{(2\sin x - 1)(\sin x + 2)}{\cos x} + 2(2\sin x - 1) = 0,$$

$$(2\sin x - 1)\left(2 - \frac{\sin x + 2}{\cos x}\right) = 0.$$

Отсюда либо

$$2\sin x - 1 = 0,$$

т. е.

$$x = k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{6},$$

где k — любое целое число, либо

$$2 - \frac{\sin x + 2}{\cos x} = 0.$$

Умножая левую часть на $\cos x$, получим

$$2\cos x - \sin x - 2 = 0.$$

Это уравнение эквивалентно предыдущему, так как, во-первых, оно *следует* * из предыдущего, а во-вторых, уравнению $2\cos x - \sin x - 2 = 0$ не удовлетворяют те значения x, для которых $\cos x = 0$, а потому из этого уравнения $2\cos x - \sin x - 2 = 0$ *следует* уравнение $2 - \frac{\sin x + 2}{\cos x} = 0$. Уравнение

$$2\cos x - \sin x - 2 = 0$$

решается так:

$$\sin x + 2 - 2\cos x = 0,$$

$$2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + 4\sin^2\frac{x}{2} = 0,$$

$$\sin\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}\right) = 0.$$

---

* Будем говорить, что уравнение $B=0$ *следует* из уравнения $A=0$ или уравнение $B=0$ является *следствием* уравнения $A=0$, если все корни уравнения $A=0$ являются корнями уравнения $B=0$.

Отсюда

$$\sin\frac{x}{2}=0,\ x=2k\pi;$$

$$\cos\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}=0,\ \operatorname{tg}\frac{x}{2}=-\frac{1}{2},\ x=2k\pi-2\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}.$$

Итак, все решения данного уравнения:

$$x=k\pi+(-1)^k\frac{\pi}{6},\ x=2k\pi,\ x=2k\pi-\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}.$$

Замечание. Так как $0<\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}<\frac{\pi}{4}$, то $0<2\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}<\frac{\pi}{2}$, а так как

$$\operatorname{tg}\left(2\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}\right)=\frac{2\operatorname{tg}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}\right)}{1-\operatorname{tg}^2\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3},$$

то

$$2\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}=\operatorname{arc\,tg}\frac{4}{3},$$

и последнюю формулу можно переписать так:

$$x=2k\pi-\operatorname{arc\,tg}\frac{4}{3}.$$

19. Обозначим через Q вторую точку пересечения прямой BC с меньшей окружностью. Тогда имеем

$$PQ=|BP-CP|$$

(знак модуля необходим, так как возможно, что $BP<CP$). Возводя в квадрат обе части этого равенства, получим

$$PQ^2=PB^2+PC^2-2PB\cdot PC,$$

$$PQ^2=4r^2-PA^2.$$

Но

$$PB\cdot PC=PM\cdot PN=(R-r)(R+r)=R^2-r^2$$

(рис. 33, M и N — концы диаметра бóльшей окружности, проходящего через точку P). Таким образом,

$$4r^2-PA^2=PB^2+PC^2-2(R^2-r^2),$$

откуда *

$$PA^2+PB^2+PC^2=2(R^2+r^2).$$

* Утверждение задачи верно и в том случае, когда прямая BC касается меньшей окружности (доказать!).

20. На рис. 34 изображены сечения данной фигуры плоскостью, проходящей через образующую SA и высоту конуса (при этом плоскости P и Q пересекутся по прямым $AP \perp SA$ и по прямой SQ, такой, что $\angle ASM = \beta$), а также плоскостью основания конуса (нижняя часть рис. 34). Имеем

$$OM = OS \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2} - \beta\right) =$$

$$= l \cos\frac{\alpha}{2} \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2} - \beta\right),$$

$$OA = l \sin\frac{\alpha}{2}.$$

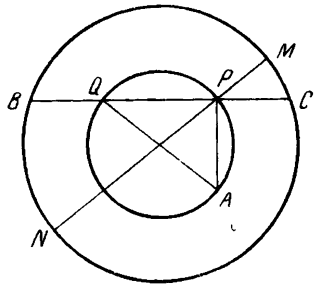

Рис. 33

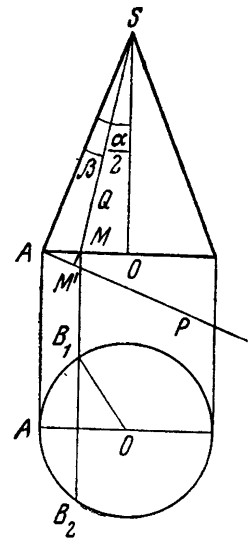

Рис. 34

Отсюда

$$B_1B_2 = 2MB_1 = 2\sqrt{l^2 \sin^2\frac{\alpha}{2} - l^2 \cos^2\frac{\alpha}{2} \operatorname{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2} - \beta\right)} =$$

$$= \frac{2l}{\cos\left(\frac{\alpha}{2} - \beta\right)} \sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2} \cos^2\left(\frac{\alpha}{2} - \beta\right) - \cos^2\frac{\alpha}{2} \sin^2\left(\frac{\alpha}{2} - \beta\right)} =$$

$$= \frac{2l}{\cos\left(\frac{\alpha}{2} - \beta\right)} \sqrt{\sin(\alpha - \beta)\sin\beta}.$$

При проектировании из точки S на плоскость P точка M спроектируется в точку M', а точки B_1 и B_2 — в точки C_1 и C_2, о которых говорится в условии задачи. При этом

$$\frac{C_1C_2}{B_1B_2} = \frac{SM'}{SM}, \text{ откуда } C_1C_2 = B_1B_2 \frac{SM'}{SM}.$$

Далее находим

$$SM' = \frac{l}{\cos\beta}, \quad SM = \frac{SO}{\cos\left(\frac{\alpha}{2} - \beta\right)} = \frac{l\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\left(\frac{\alpha}{2} - \beta\right)},$$

так что

$$C_1C_2 = B_1B_2 \frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2} - \beta\right)}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\beta}$$

и окончательно

$$C_1C_2 = 2l \frac{\sqrt{\sin(\alpha-\beta)\sin\beta}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\beta}.$$

Решение варианта 5

21. Так как a служит основанием системы логарифмов, то должно быть $a>0$, $a\neq 1$. Рассмотрим два случая: $0<a<1$ и $a>1$.

Если $0<a<1$ (и $\sin x>0$), то $\log_a \sin x \geqslant 0$, значит, для данного уравнения следует взять только неотрицательные корни уравнения $z^2+z-a=0$, где $z=\log_a \sin x$. Но при $0<a<1$ корни данного уравнения разных знаков, значит, надо взять положительный корень

$$\log_a \sin x = \frac{\sqrt{1+4a}-1}{2}.$$

Если $a>1$ (и $\sin x>0$), то $\log_a \sin x \leqslant 0$ и, значит, для данного уравнения следует взять отрицательный корень

$$\log_a \sin x = -\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}.$$

Итак, если $0<a<1$, то

$$x = k\pi + (-1)^k \arcsin a^{\frac{\sqrt{1+4a}-1}{2}},$$

а если $a>1$, то

$$x = k\pi + (-1)^k \arcsin a^{-\frac{\sqrt{1+4a}+1}{2}};$$

в обоих случаях k принимает все целые значения.

22. Перепишем данное неравенство так:

$$1 - \frac{\cos x}{4\cos^2 x - 3} + \frac{1}{4\cos^2 x - 3} < 0,$$

или

$$\frac{4\cos^2 x - \cos x - 2}{4\cos^2 x - 3} < 0,$$

или

$$y=\frac{\left(\cos x-\frac{1-\sqrt{33}}{8}\right)\left(\cos x-\frac{1+\sqrt{33}}{8}\right)}{\left(\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}.$$

Отсюда

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}<\cos x<\frac{1-\sqrt{33}}{8},\quad \frac{1+\sqrt{33}}{8}<\cos x<\frac{\sqrt{3}}{2}$$

и, следовательно,

$$\arccos\frac{1-\sqrt{33}}{8}<x<\frac{5\pi}{6},$$

$$\frac{\pi}{6}<x<\arccos\frac{1+\sqrt{33}}{8}\ \text{(рис. 35)}.$$

23. Перепишем данное выражение в виде

$$(1+x+2x^2+\ldots+nx^n)(1+x+2x^2+\ldots+nx^n).$$

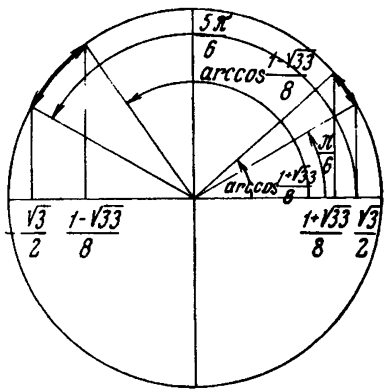

Рис. 35

Отсюда сразу находим коэффициент при x^n:

$$a_n=n\cdot 1+(n-1)\cdot 1+(n-2)\cdot 2+(n-3)\cdot 3+\ldots+$$

$$+[n-(n-1)](n-1)+1\cdot n=2n+n(1+2+3+\ldots+n-1)-$$

$$-[1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2]=2n+n\frac{n(n-1)}{2}- \qquad (1)$$

$$-\frac{(n-1)(2n-1)n}{6}=\frac{n(n^2+11)}{6}.$$

Замечание. Изложенный метод потребовал применения формулы

$$s = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad (2)$$

для суммы $1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2$. Формула (2) выводится так: положим в тождестве

$$(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$$

последовательно $k=1$, $k=2$, ..., $k=n$; получим

$$2^3 - 1^3 = 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1,$$

$$3^3 - 2^3 = 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$(n+1)^3 - n^3 = 3 \cdot n^2 + 3 \cdot n + 1.$$

Сложив полученные равенства, имеем

$$(n+1)^3 - 1 = 3 \cdot s + 3\,\frac{n(n+1)}{2} + n,$$

где s — искомая сумма. Отсюда находим

$$3s = (n+1)^3 - \frac{3}{2}\,n(n+1) - (n+1) =$$

$$= (n+1)\left(n^2 + 2n + 1 - \frac{3n}{2} - 1\right) =$$

$$= (n+1)\left(n^2 + \frac{n}{2}\right) = \frac{1}{2}\,n(n+1)(2n+1)$$

и, значит,

$$s = \frac{1}{6}\,n(n+1)(2n+1).$$

Можно обойтись и без этой формулы.
Из формулы (1) имеем

$$a_{n+1} = 2(n+1) + (n+1)(1 + 2 + 3 + \ldots + n - 1 + n) -$$

$$- [1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2 + n^2]. \qquad (3)$$

Из формул (1) и (3) находим

$$a_{n+1} - a_n = 2 + n^2 + 1 + 2 + 3 + \ldots + n - 1 + n - n^2 = 2 + \frac{n(n+1)}{2}.$$

Из этой формулы имеем

$$a_2 - a_1 = 2 + \frac{1 \cdot 2}{2},$$

$$a_3 - a_2 = 2 + \frac{2 \cdot 3}{2},$$

$$a_4 - a_3 = 2 + \frac{3 \cdot 4}{2},$$

. . . . . .

$$a_n - a_{n-1} = 2 + \frac{(n-1)\,n}{2}.$$

Складывая эти равенства, получим

$$a_n - a_1 = 2(n-1) + \frac{1}{2}[1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + (n-1)\,n]. \quad (4)$$

Для вычисления суммы, стоящей в квадратных скобках, рассмотрим тождество

$$(k-1)\,k\,(k+1) - (k-2)(k-1)\,k = 3(k-1)\,k.$$

Полагая в этом тождестве $k=2$, $k=3$, ..., $k=n$, получим

$$1 \cdot 2 \cdot 3 - 0 \cdot 1 \cdot 2 = 3 \cdot 1 \cdot 2,$$

$$2 \cdot 3 \cdot 4 - 1 \cdot 2 \cdot 3 = 3 \cdot 2 \cdot 3,$$

$$3 \cdot 4 \cdot 5 - 2 \cdot 3 \cdot 4 = 3 \cdot 3 \cdot 4,$$

. . . . . .

$$(n-1)\,n\,(n+1) - (n-2)(n-1)\,n = 3(n-1)\,n.$$

Складывая почленно эти равенства, найдем

$$(n-1)\,n\,(n+1) = 3[1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + (n-1)\,n];$$

отсюда

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + (n-1)\,n = \frac{(n-1)\,n\,(n+1)}{3}.$$

Теперь заметим, что a_1 — это коэффициент при x в выражении $(1+x)^2$, т. е. $a_1=2$. Таким образом, из формулы (4) находим

$$a_n = 2 + 2(n-1) + \frac{(n-1)\,n\,(n+1)}{6} = \frac{n(n^2+11)}{6}.$$

24. Рассмотрим два случая: лучи DP и DQ находятся по одну сторону от диаметра DC (рис. 36) и по разные стороны от него (рис. 37). Так как площадь кругового сектора равна половине квадрата радиуса, умноженной на угол сектора, то площади кру-

говых секторов $M\breve{D}N$ и $OP\breve{Q}$ равны между собой ($\angle POQ = 2\angle DPQ$, но $DM = OP\sqrt{2}$).

Далее, площадь, о которой говорится в условии задачи, равна разности площадей $D\breve{P}Q$ и $D\breve{M}N$, или разности площадей $D\breve{P}Q$ и $O\breve{P}Q$, или разности площадей треугольников DPQ и OPQ, так как фигуры $D\breve{P}Q$ и OPQ имеют в качестве общей части сегмент с хордой PQ. В случае, изображенном на рис. 36, разность площадей треугольников DPQ и OPQ равна разности площадей треугольников DPK и QKO (K — точка пересечения OP и DQ),

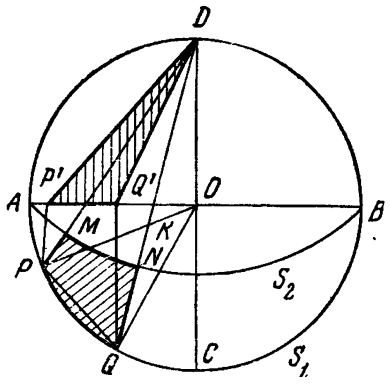

Рис. 36

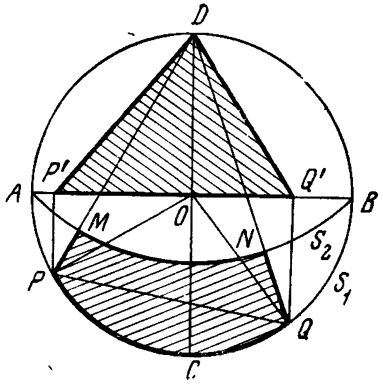

Рис. 37

или разности площадей треугольников DPO и DQO. Но пл. $\triangle DPO =$ = пл. $\triangle DP'O$, пл. $\triangle DQO =$ пл. $\triangle DQ'O$, а разность площадей треугольников $DP'O$ и $DQ'O$ равна площади треугольника $DP'Q'$.

В случае, изображенном на рис. 37, дело обстоит проще: разность площадей треугольников DPQ и OPQ равна сумме площадей треугольников DPO и DQO, которые соответственно равновелики треугольникам $DP'O$ и $DQ'O$. Сумма же площадей последних треугольников равна площади треугольника $DP'Q'$.

Замечание. Утверждение задачи верно и в том случае, если одна из точек P или Q совпадает с точкой C.

25. Если две сферы касаются одной и той же плоскости и друг друга, то расстояние между точками касания равно $2\sqrt{Rr}$, где r и R — радиусы сфер (см. последнюю задачу варианта 2 — задачу № 10).

Пусть x — искомый радиус сферы μ, которая касается трех данных сфер α, β и γ (радиусы сфер α и γ равны r, а радиус сферы β равен R) и данной плоскости. Обозначим точки прикосновения сфер α, β, γ и μ к данной плоскости соответственно через A, B, C и M. Тогда на основании замечания, сделанного в начале решения, будем иметь

$$AB = 2\sqrt{rR},\ BC = 2\sqrt{rR},\ AC = 2r;$$
$$MA = 2\sqrt{xr},\ MC = 2\sqrt{xr},\ MB = 2\sqrt{xR}.$$

Отсюда следует, что треугольник ABC равнобедренный ($BA=BC$) и что точка M лежит на медиатрисе его основания AC, иначе на высоте, проходящей через вершину B. Для уточнения положения точки M рассмотрим три случая:

1° $AB>AC$, или $R>r$;

2° $AB<AC$, или $R<r$;

3° $AB=AC$, или $R=r$.

Заметим, что в случаях 1°, 2°

$$\frac{CA}{CB}=\frac{MA}{MB}=\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{R}}\neq 1,$$

значит, точки M и C лежат на окружности, являющейся геометрическим местом точек, для каждой из которых отношение расстояний до точек A и B равно $\frac{CA}{CB}$ (это так называемая одна из трех окружностей Апполония для треугольника ABC). Эту окружность можно построить так: пусть P и Q — точки, в которых биссектрисы внутреннего и внешнего угла C треугольника ABC пересекают сторону AB (рис. 38). Точки P и Q принадлежат окружности Апполония, проходящей через вершину C, так как

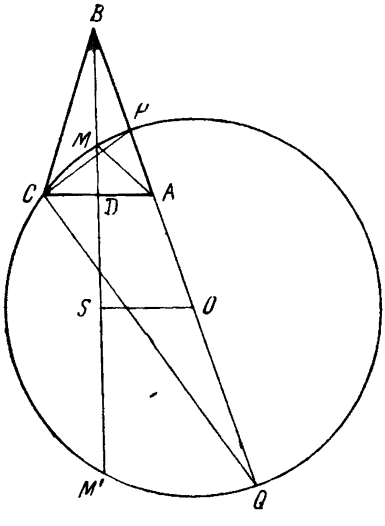

Рис. 38

$$\frac{PA}{PB}=\frac{QA}{QB}=\frac{CA}{CB}.$$

Окружность Апполония — это окружность, построенная на отрезке PQ как на диаметре.

Таким образом, с помощью циркуля и линейки можно построить точки прикосновения искомых сфер к данной плоскости, если известны точки прикосновения данных сфер к данной плоскости.

Замечание. Конечно, приведенного только что рассуждения от поступающих на физический факультет не требовалось. Геометрически очевидно, что точки прикосновения искомых сфер к данным и к данной плоскости лежат на медиатрисе отрезка AC.

1°. В случае $AB>AC$, т. е. $R>r$ (см. рис. 38), одна из точек M прикосновения искомой сферы к данной плоскости лежит внутри треугольника ABC, а другая M' — на продолжении луча BD за точку D.

2°. В случае $AB<AC$ точки M и M' лежат по разные стороны от точки B на медиатрисе отрезка AC. Если $R=\frac{r}{3}$, то точка M

лежит на прямой AC, в случае $\frac{r}{3}<R<r$ точка M лежит внутри треугольника ABC (рис. 39), а в случае $R<\frac{r}{3}$ точка M лежит вне треугольника ABC (рис. 40).

Наконец, в случае $AB=AC$ $(R=r)$ треугольник ABC — равносторонний: точка M находится на равных расстояниях от его вершины, т. е. является центром окружности, описанной вокруг тре-

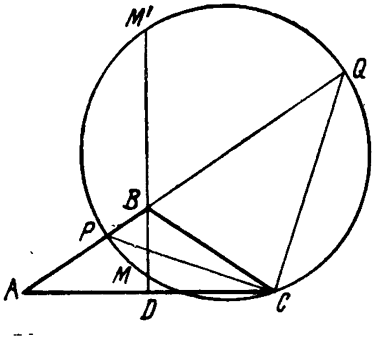

Рис. 39

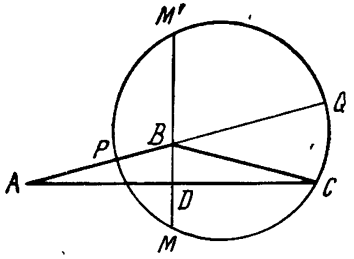

Рис. 40

угольника. В этом случае существует только одна сфера, удовлетворяющая условию задачи. Так как расстояние от точки M до точки A равно $2\sqrt{xr}$, а, с другой стороны, радиус окружности, описанной вокруг треугольника со стороной $2r$, равен $\frac{2r}{\sqrt{3}}$, то из равенства

$$2\sqrt{xr}=\frac{2r}{\sqrt{3}}$$

находим $x=\frac{r}{3}$. Вернемся к общим случаям 1° и 2°. Предположим, что $AB>BC$ (см. рис. 38). Находим

$$BD=\sqrt{AB^2-AD^2}=\sqrt{4Rr-r^2},$$

$$MD=BD-BM=\sqrt{4Rr-r^2}-2\sqrt{Rx},$$

$$MD^2+DA^2=MA^2, \qquad (1)$$

$$(\sqrt{4Rr-r^2}-2\sqrt{Rx})^2+r^2=4xr,$$

$$4Rr-r^2-4\sqrt{4Rr-r^2}\sqrt{Rx}+4Rx+r^2=4rx,$$

$$(R-r)x-\sqrt{Rr}\sqrt{4R-r}\sqrt{x}+Rr=0.$$

Если повторить те же рассуждения для точки M', то получим то же самое квадратное уравнение относительно $\sqrt{x}$ (так как $M'D=2\sqrt{Rx}-\sqrt{4Rr-r^2}$). Отсюда следует, что корни последнего уравнения дают значения квадратных корней из радиусов x искомых сфер, причем бо́льший корень соответствует сфере с точкой касания M' (так как она более удалена от точки A, а ее расстояние до точки A равно $2\sqrt{Rx}$). Решая последнее уравнение, получим

$$\sqrt{x}=\sqrt{Rr}\,\frac{\sqrt{4R-r}\pm\sqrt{3r}}{2(R-r)},$$

откуда

$$x_{1,2}=Rr\,\frac{(\sqrt{4R-r}\pm\sqrt{3r})^2}{4(R-r)^2};$$

знак минус соответствует сфере с точкой касания M, а знак плюс — сфере с точкой касания M'.

Перейдем теперь к случаю $AB<AC$, или $R<r$; заметим, что в этом случае точка M (см. рис. 39, 40) может лежать и на отрезке BD, и на продолжении его за точку D, и даже совпадать с точкой D. Вторая же точка касания сферы с тремя данными лежит на продолжении отрезка DB за точку B. Точка M совпадает с точкой D, если $MC=DC$, т. е. $2\sqrt{xr}=r$, т. е. $x=\frac{r}{4}$. В этом случае $AD=AM=2\sqrt{xR}=\sqrt{rR}$, и из прямоугольного треугольника ADB находим

$$AD^2+DB^2=AB^2,\ r^2+rR=4Rr,$$

откуда $R=\frac{r}{3}$. При таком значении R точка касания искомой сферы с данной плоскостью совпадает с точкой D.

Считая $R<r$, заметим, что должно быть $R\geqslant\frac{r}{4}$, так как $\frac{r}{4}$ есть радиус минимальной сферы, касающейся данной плоскости и двух данных сфер радиуса r, касающихся между собой и этой плоскости. Теперь, повторяя для точки M те же рассуждения, что и выше в случае 1° независимо от положения точки M на *луче* BD, получим то же самое уравнение (1), которое лучше переписать в виде

$$(r-R)x+\sqrt{Rr}\sqrt{4R-r}\sqrt{x}-Rr=0.$$

Это уравнение имеет действительные корни разных знаков; берем, естественно, только положительный корень:

$$\sqrt{x}=\sqrt{Rr}\,\frac{\sqrt{3r}-\sqrt{4R-r}}{2(r-R)},$$

откуда

$$x = Rr\,\frac{(\sqrt{3r} - \sqrt{4R - r})^2}{4(r - R)^2}.$$

Для точки M' получим уравнение

$$(r - R)x - \sqrt{Rr}\sqrt{4R - r}\sqrt{x} - Rr = 0,$$

откуда

$$x = Rr\,\frac{(\sqrt{3r} + \sqrt{4R - r})^2}{4(r - R)^2}.$$

Остановимся еще на случае $R = \frac{r}{4}$. Тогда точки A, B и C лежат на одной прямой. В этом случае имеются две сферы радиусов $x = \frac{r}{3}$, касающиеся трех данных; центры их симметричны относительно прямой AC и отстоят от этой прямой на расстоянии $\frac{r}{\sqrt{3}}$.

Отметим, что в конце концов задача во всех случаях имеет два решения:

$$x_{1,2} = Rr\,\frac{(\sqrt{4R - r} \pm \sqrt{3r})^2}{4(R - r)^2},$$

конечно, в предположении, что $R \neq r$, $R \geqslant \frac{r}{4}$.

Читателю рекомендуется произвести вычисления исходя из геометрического построения точек M и M'. Знакомым с понятием степени точки относительно окружности можно рекомендовать такой путь решения (что избавит от рассмотрения всевозможных частных случаев); из соотношений

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{R}},\quad \frac{\overline{AQ}}{\overline{QB}} = -\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{R}}$$

находим (положительное направление выберем от A к B)

$$\overline{PB} = \frac{2R\sqrt{r}}{\sqrt{R} + \sqrt{r}},\ \overline{QB} = \frac{2R\sqrt{r}}{\sqrt{R} - \sqrt{r}}.$$

Далее,

$$\overline{BM} \cdot \overline{BM'} = \overline{BP} \cdot \overline{BQ} = \frac{4R^2 r}{R - r}.$$

Далее,

$$\frac{\overline{BM} + \overline{BM'}}{2} = \overline{BS},$$

где S — проекция центра O окружности Апполония на ось $\overrightarrow{BD}$ (положительное направление берем от B к D).

Имеем

$$\frac{\overline{BS}}{\overline{BD}}=\frac{\overline{BO}}{\overline{BA}} \quad \text{или} \quad \frac{\overline{BS}}{\sqrt{4rR-r^2}}=\frac{\frac{\overline{BP}+\overline{BQ}}{2}}{-2\sqrt{rR}}=\frac{R}{R-r};$$

отсюда

$$\overline{BS}=\frac{R\sqrt{4rR-r^2}}{R-r}$$

и, значит,

$$\overline{BM}+\overline{BM'}=\frac{2R\sqrt{4rR-r^2}}{R-r}.$$

Таким образом, $\overline{BM}$ и $\overline{BM'}$ — корни уравнения

$$\lambda^2-\frac{2R\sqrt{4rR-r^2}}{R-r}\lambda+\frac{4R^2r}{R-r}=0,$$

или

$$(R-r)\lambda^2-2R\sqrt{4rR-r^2}\lambda+4R^2r=0;$$

отсюда

$$\lambda_{1,2}=\frac{R\sqrt{r}(\sqrt{4R-r}\pm\sqrt{3r})}{R-r}.$$

Корни λ_1 и λ_2 действительны $\left(R\geqslant\frac{r}{4}\right)$. Если $R>r$, то они положительны, т. е. точки M и M' (ведь $\lambda_1=\overline{BM}$, $\lambda_2=\overline{BM'}$) лежат на луче $\overrightarrow{BD}$. Если $R<r$, то корни разных знаков: одна из точек M лежит на луче $\overrightarrow{BD}$, другая — на его продолжении за точку B.

Найти значения радиусов сфер можно так: так как $|\lambda_1|=BM=2\sqrt{Rx_1}$, $|\lambda_2|=BM'=2\sqrt{Rx_2}$, то радиусы сфер находятся из соотношения

$$2\sqrt{Rx}=\frac{R\sqrt{r}\,|\sqrt{4R-r}\pm\sqrt{3r}\,|}{|R-r|},$$

откуда

$$x_{1,2}=\frac{Rr(\sqrt{4R-r}\pm\sqrt{3r})^2}{4(R-r)^2}$$

$\left(\text{все это в предположении } R\neq r \text{ и } R\geqslant\frac{r}{4}\right)$.

Решение варианта 6

26. Корни данного уравнения

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4a}}{2}$$

будут действительны тогда и только тогда, когда $1-4a \geqslant 0$, т. е. $a \leqslant \frac{1}{4}$. Оба корня больше a, если больше a меньший корень:

$$\frac{-1-\sqrt{1-4a}}{2} > a,$$

или

$$\sqrt{1-4a} < -1-2a.$$

Если $-1-2a<0$, т. е. $a > -\frac{1}{2}$ (и $a \leqslant \frac{1}{4}$), то это неравенство не имеет места. Будем считать, что $a \leqslant -\frac{1}{2}$. Тогда $-1-2a \geqslant 0$ и неравенство $\sqrt{1-4a} < -1-2a$ эквивалентно такому:

$$1-4a < 1+4a+4a^2,$$

или

$$a(a+2) > 0,$$

или, так как $a \leqslant -\frac{1}{2}$:

$$a+2<0,$$

т. е. $a<-2$. Таким образом, все значения a, при которых оба корня уравнения $x^2+x+a=0$ будут больше a, таковы: $a<-2$.

Замечание. Эту задачу можно решить и так: $1-4a \geqslant 0$ — условие действительности корней данного уравнения;
$\left.\begin{array}{l} a^2+2a>0 \\ 2a+1<0 \end{array}\right\}$ — условие того, что оба корня данного уравнения (если они действительны) будут больше a (см. стр. 59).

27. Перепишем данное неравенство в виде

$$\frac{\sin x - 2}{4\sin^2 x - 1} - 2 > 0,$$

или

$$\frac{\sin x - 8\sin^2 x}{4\sin^2 x - 1} > 0,$$

или

$$\frac{\sin x\left(\sin x - \frac{1}{8}\right)}{\left(\sin x + \frac{1}{2}\right)\left(\sin x - \frac{1}{2}\right)} < 0.$$

Отсюда $-\frac{1}{2}<\sin x<0$ и $\frac{1}{8}<\sin x<\frac{1}{2}$.

Все решения:

$$2k\pi+\arcsin\frac{1}{8}<x<\frac{\pi}{6}+2k\pi,$$

$$2k\pi+\frac{5\pi}{6}<x<(2k+1)\pi-\arcsin\frac{1}{8},$$

$$(2k+1)\pi<x<(2k+1)\pi+\frac{\pi}{6},$$

$$2k\pi-\frac{\pi}{6}<x<2k\pi,$$

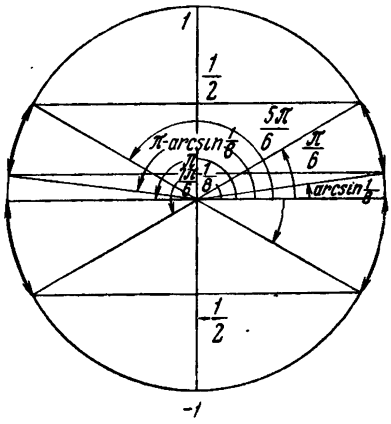

Рис. 41

где k принимает все целые значения (рис. 41).

28. Перепишем данное уравнение в виде

$$9^{|x|}=2^{|x+1|+|x-1|}.$$

Корни выражений x, $x+1$, $x-1$ таковы: 0, —1, 1. Естественно поэтому рассмотреть следующие случаи:

1) $x\leqslant -1$; уравнение принимает вид

$$9^{-x}=2^{-x-1-x+1},$$

или

$$9^x=4^x;$$

отсюда $x=0$. Это противоречит условию $x\leqslant -1$ таким образом, уравнение не имеет корней, меньших или равных —1.

2) $-1\leqslant x\leqslant 0$. В этом случае уравнение принимает вид

$$9^{-x}=2^{x+1-x+1},$$

или

$$3^{-2x}=2^2,$$

или

$$3^x=2^{-1},$$

откуда

$$x=-\log_3 2.$$

Так как число $-\log_3 2<0$ и так как $-\log_3 2-(-1)=1-\log_3 2=\log_2\frac{3}{2}\geqslant 0$, то $-\log_3 2>-1$. Таким образом, на сегменте [—1, 0] данное уравнение имеет корень $x=-\log_3 2$.

3) $0 \leqslant x \leqslant 1$. В этом случае данное уравнение примет вид

$$9^x = 2^{x+1-x+1},$$

или

$$3^x = 2,$$

откуда

$$x = \log_3 2,$$

и так как $0 < \log_3 2 < 1$, то $x = \log_3 2$ — корень данного уравнения.

4) $x \geqslant 1$. В этом случае данное уравнение примет вид

$$9^x = 2^{x+1+x-1},$$

или

$$3^x = 2^x,$$

откуда $x = 0$. Таким образом, данное уравнение не имеет корней в полуинтервале $[1, +\infty)$.

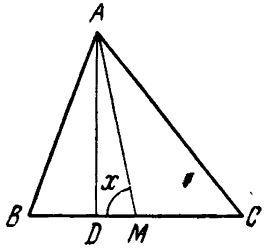

Рис. 42

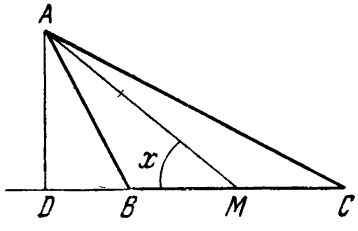

Рис. 43

Итак, данное уравнение имеет два корня:

$$x_1 = -\log_3 2, \quad x_2 = \log_3 2;$$

первый лежит в интервале $(-1, 0)$, второй — в интервале $(0, 1)$.

29. Предположим, что $\angle B > \angle C$ и $\angle B < \frac{\pi}{2}$ (рис. 42). Пусть D — проекция вершины A на сторону BC. Имеем

$$2(BD + DM) = BC = BD + DC,$$

откуда

$$DM = \frac{1}{2}(DC - DB).$$

Но $DM = h\operatorname{ctg} x$, $DC = h\operatorname{ctg} C$, $DB = h\operatorname{ctg} B$ $(h = AD)$. Поэтому

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{2}(\operatorname{ctg} C - \operatorname{ctg} B).$$

Если $\angle B > \frac{\pi}{2}$, то (рис. 43)

$$2(DM - DB) = BC = DC - DB,$$

откуда

$$DM = \frac{1}{2}(DC + DB).$$

Но

$$DM = h\operatorname{ctg} x, \quad DC = h\operatorname{ctg} C, \quad DB = h\operatorname{ctg}(\pi - B) = -h\operatorname{ctg} B,$$

значит,

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{2}(\operatorname{ctg} C - \operatorname{ctg} B).$$

Читателю предлагается убедиться в том, что эта формула верна и в случае $\angle B = \frac{\pi}{2}$.

Аналогично в случае $\angle C > \angle B$ получим формулу

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{2}(\operatorname{ctg} B - \operatorname{ctg} C);$$

наконец, она верна и в случае $\angle B = \angle C$. Итак, во всех случаях

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{2}\left|\operatorname{ctg} B - \operatorname{ctg} C\right|.$$

30. Эта задача решается аналогично последней задаче варианта 3 (задача 15, рис. 31). Если сферы радиуса r касаются граней данного двугранного угла и друг друга в точке P, а сфера радиуса $x < r$ касается их обоих и граней того же двугранного угла, то, обозначая через C центр сферы радиуса x, как и в задаче 15 варианта 3, находим $PC = \sqrt{x^2 + 2rx}$ и теперь из рис. 31 находим

$$r - x = \sqrt{x^2 + 2rx}\sin\frac{\alpha}{2}.$$

А так как $\frac{x}{r} = m$, то

$$1 - m = \sqrt{m^2 + 2m}\sin\frac{\alpha}{2},$$

откуда

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - m}{\sqrt{m^2 + 2m}}, \tag{1}$$

и так как $0 < \alpha < \pi$ (исключаем нулевой и развернутый двугранные углы), то $0 < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$, значит,

$$0 < \frac{1 - m}{\sqrt{m^2 + 2m}} < 1.$$

Отсюда $m<1$ и, далее,

$$1-m<\sqrt{m^2+2m},$$

$$1-2m+m^2<m^2+2m,$$

$$m>\frac{1}{4}.$$

Итак,

$$\frac{1}{4}<m<1.$$

При выполнении этих неравенств из соотношения (1) находим

$$\alpha=2\arcsin\frac{1-m}{\sqrt{m^2+2m}}.$$

Решение варианта 7

31. Так как

$$\frac{1+x}{\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{x}=\left(\sqrt[4]{x}-\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^2+2\geqslant 2,$$

то, полагая

$$\frac{1+x}{\sqrt{x}}=\lambda,$$

получим квадратное уравнение

$$\lambda^2+2a\lambda+1=0; \qquad (1)$$

исследуем, при каком условии оно имеет действительные корни, не меньшие двух. Прежде всего должно быть выполнено условие

$$a^2-1\geqslant 0,$$

откуда или $a\leqslant -1$, или $a\geqslant 1$. Если $a\geqslant 1$, то корни уравнения (1) действительны, но отрицательны ($x_1x_2=1$, $x_1+x_2=-2a<0$), значит, должно быть $a\leqslant -1$. При $a=-1$ корни уравнения (1) равны между собой и равны 1 (а должно быть $\lambda\geqslant 2$).

Итак,

$$a<-1.$$

Уравнение (1) имеет корень $\lambda=2$, если

$$4+4a+1=0, \quad \text{откуда} \quad a=-\frac{5}{4}.$$

Уравнение (1) принимает при этом следующий вид:

$$\lambda^2-\frac{5}{2}\lambda+1=0$$

и имеет корни

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}.$$

Итак, если $a = -\frac{5}{4}$, то данное уравнение приводится к виду

$$\frac{1+x}{\sqrt{x}} = 2,$$

$$x - 2\sqrt{x} + 1 = 0,$$

или

$$(\sqrt{x} - 1)^2 = 0,$$

откуда

$$x = 1.$$

Итак, если $a = -\frac{5}{4}$, то данное уравнение имеет только один корень $x = 1$. Будем считать, что $a < -1$ и $a \neq -\frac{5}{4}$. Тогда корни λ_1 и λ_2 уравнения (1) действительны, различны, положительны и ни один из них не равен 2. Данное уравнение имеет решения, если

$$\text{или } \lambda_1 < 2 < \lambda_2, \quad \text{или} \quad 2 < \lambda_1 < \lambda_2.$$

В первом случае только уравнение $\frac{1+x}{\sqrt{x}} = \lambda_2$, или $x - \lambda_2\sqrt{x} + 1 = 0$, имеет различные действительные и положительные решения (относительно $\sqrt{x}$).

Во втором случае этим свойством обладают оба уравнения:

$$\frac{1+x}{\sqrt{x}} = \lambda_1 \quad \text{и} \quad \frac{1+x}{\sqrt{x}} = \lambda_2.$$

Соотношения $\lambda_1 < 2 < \lambda_2$ будут выполнены тогда и только тогда, когда *

$$4 + 4a + 1 < 0, \quad \text{откуда} \quad a < -\frac{5}{4}.$$

Итак, если $a < -\frac{5}{4}$, то

$$\lambda_2 = \sqrt{a^2 - 1} - a,$$

$$\frac{1+x}{\sqrt{x}} = \lambda_2, \tag{2}$$

* См. предварительное замечание к решению задачи 6 варианта 2, стр. 59.

и из уравнения (2), которое принимает вид

$$x-(\sqrt{a^2-1}-a)\sqrt{x}+1=0,$$

находим

$$\sqrt{x}=\frac{\sqrt{a^2-1}-a\pm\sqrt{2a^2-5-2a\sqrt{a^2-1}}}{2},$$

значит,

$$x_{1,2}=\frac{1}{4}\left(\sqrt{a^2-1}-a\pm\sqrt{2a^2-5-2a\sqrt{a^2-1}}\right)^2. \qquad (3)$$

Неравенства $2<\lambda_1<\lambda_2$ будут выполнены тогда и только тогда, когда

$$4+4a+1>0,$$
$$4+2a<0,$$

откуда

$$a>-\frac{5}{4},\quad a<-2;$$

эта система неравенств несовместна.

Итак, если $a<-\frac{5}{4}$, то данное уравнение имеет два корня, заданные соотношением (3). Если $a=-\frac{5}{4}$, то данное уравнение имеет один корень $x=1$. Если $a>-\frac{5}{4}$, то уравнение не имеет корней.

32. Перепишем данное неравенство так:

$$\frac{\operatorname{tg}^2 x-2}{\operatorname{tg}^2 x-1}-\frac{1}{2}<0,$$

или

$$\frac{\operatorname{tg}^2 x-3}{\operatorname{tg}^2 x-1}<0,$$

или

$$\frac{(\operatorname{tg}x+\sqrt{3})(\operatorname{tg}x-\sqrt{3})}{(\operatorname{tg}x+1)(\operatorname{tg}x-1)}<0.$$

Отсюда

$$-\sqrt{3}<\operatorname{tg}x<-1,$$
$$1<\operatorname{tg}x<\sqrt{3},$$

следовательно (рис. 44):

$$k\pi - \frac{\pi}{3} < x < k\pi - \frac{\pi}{4}, \qquad k\pi + \frac{\pi}{4} < x < k\pi + \frac{\pi}{3},$$

где k принимает все целые значения.

33. Будем обозначать через a_n число

$$\underbrace{aaa\ldots aa}_{n \text{ цифр; } a\text{—цифра}}.$$

Имеем

$$1_{2n} - 2_n = \frac{1}{9} \cdot 9_{2n} - \frac{2}{9} 9_n = \frac{1}{9}(10^{2n} - 1) - \frac{2}{9}(10^n - 1) =$$

$$= \frac{10^{2n} - 2 \cdot 10^n + 1}{9} = \left(\frac{10^n - 1}{3}\right)^2 = \left(\frac{9_n}{3}\right)^2 = 3_n^2.$$

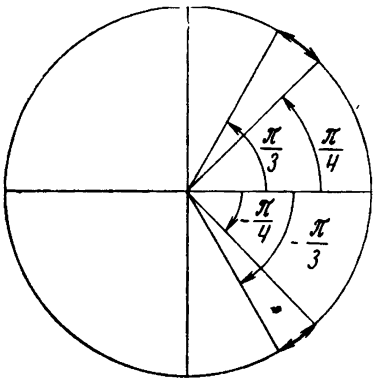

Рис. 44

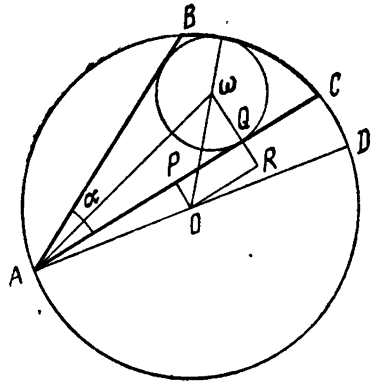

Рис. 45

34. Из рис. 45 находим (x — искомый радиус):

$$O\omega = r - x, \qquad \omega R = \omega Q + QR = x + \sqrt{r^2 - \frac{b^2}{4}},$$

$$OR = PQ = AQ - AP = x \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} - \frac{b}{2}.$$

Теперь из прямоугольного треугольника ωOR находим

$$\left(x \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(x + \sqrt{r^2 - \frac{b^2}{4}}\right)^2 = (r - x)^2,$$

или

$$x^2 \operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2} - bx \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \frac{b^2}{4} + x^2 + 2x\sqrt{r^2 - \frac{b^2}{4}} + r^2 - \frac{b^2}{4} =$$

$$= r^2 - 2rx + x^2,$$

или

$$x^2\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2} - bx\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + 2x\sqrt{r^2 - \frac{b^2}{4}} = -2rx,$$

или

$$x\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2} = b\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} - \sqrt{4r^2 - b^2} - 2r,$$

значит,

$$x = \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\left(b\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} - \sqrt{4r^2 - b^2} - 2r\right).$$

Замечание. Для тех, кто знаком с преобразованием инверсии и некоторыми ее свойствами, покажем, как с помощью циркуля и линейки *построить* окружность, касающуюся хорд AC и AB и дуги $\overset{\frown}{BC}$, а затем на этом пути вычислить радиус этой окружности.

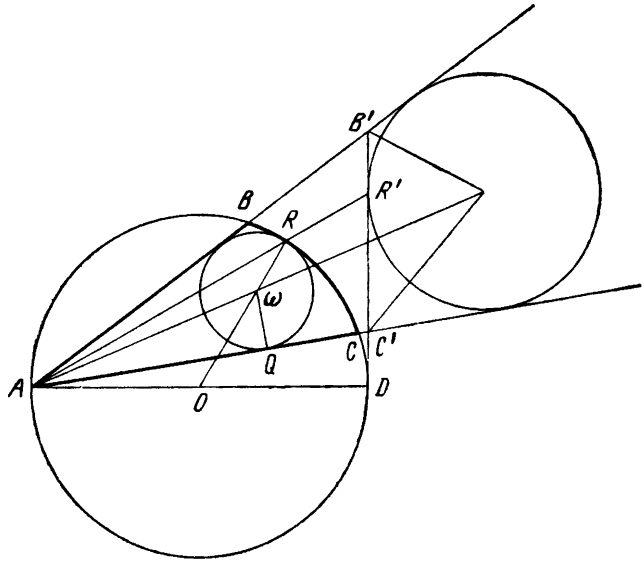

Рис. 46

Произведем инверсию с центром в точке A и степенью инверсии, равной $k=4r^2$. При этой инверсии данная окружность перейдет в касательную t к ней, проведенной в точке D. Точки B и C перейдут в точки B' и C' пересечения прямых AB и AC с этой касательной и искомая окружность S перейдет в окружность S' вневписанную в угол A треугольника $AB'C'$. Окружность S' легко построить. Пусть окружность S' касается прямой t в точке R'; прямая $R'A$ пересекает данную окружность в точке R, являющейся точкой прикосновения искомой окружности с дугой BC. Центр ω искомой окружности лежит в точке пересечения прямой RO (O — центр данной окружности) с биссектрисой угла BAC (рис. 46).

Для вычисления радиуса окружности S заметим, что окружность S' из окружности S может быть получена гомотетией с центром A и коэффициентом гомотетии, равным $\frac{k}{\sigma}$, где k — степень инверсии, а σ — степень точки A относительно окружности S. Значит, радиус x окружности S равен радиусу x' окружности S', умноженному на $\frac{\sigma}{k}$:

$$x = x'\frac{\sigma}{k};$$

но

$$\sigma = AQ^2 = x^2\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}, \quad k = 4r^2,$$

значит,

$$x = x'\frac{x^2\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}}{4r^2},$$

и потому

$$x = 4r^2\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{1}{x'}.$$

Остается вычислить x'. Радиус окружности, вневписанной в угол A треугольника $AB'C'$, вычисляется по формуле

$$s' = (p' - a')\,x',$$

где s' — площадь треугольника $AB'C'$, p' — полупериметр, a' — длина стороны $B'C'$. Имеем

$$s' = r\,DB' - r\,DC' = r\cdot 2r\operatorname{tg}(\alpha+\beta) - r\cdot 2r\operatorname{tg}\beta \quad (\beta = \angle CAD),$$

или

$$s' = 2r^2\frac{\sin\alpha}{\cos(\alpha+\beta)\cos\beta}.$$

Далее, $p' - a' = \frac{1}{2}(AB' + AC' - B'C') =$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2r}{\cos(\alpha+\beta)} + \frac{2r}{\cos\beta} - \frac{2r\sin\alpha}{\cos\beta\cos(\alpha+\beta)}\right] =$$

$$= r\frac{\cos\beta + \cos(\alpha+\beta) - \sin\alpha}{\cos\beta\cos(\alpha+\beta)}.$$

Итак,

$$x' = \frac{s'}{p'-a'} = \frac{2r\sin\alpha}{\cos\beta + \cos(\alpha+\beta) - \sin\alpha} =$$

$$= \frac{4r\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)\cos\frac{\alpha}{2} - 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{2r\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right) - \sin\frac{\alpha}{2}},$$

значит,

$$x = 4r^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right) - \sin\frac{\alpha}{2}}{2r \sin\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= 2r \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \frac{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\beta - \sin\frac{\alpha}{2}\sin\beta - \sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= 2r \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\cos\beta - \sin\beta - 1\right) =$$

$$= 2r \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} \cdot \frac{b}{2r} - \frac{\sqrt{4r^2 - b^2}}{2r} - 1\right) =$$

$$= \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\left(b \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} - \sqrt{4r^2 - b^2} - 2r\right).$$

35. Предположим, что $2\alpha < \frac{\pi}{2}$. На рис. 47 изображено сечение конусов плоскостью, проходящей через их общую образующую OA и высоты OC и OC'. Это сечение дополнено прямой OD, лежащей

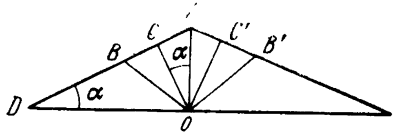

Рис. 47

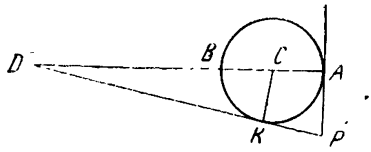

Рис. 48

в плоскости сечения и перпендикулярной их общей образующей OA. На рис. 48 изображено сечение одного из конусов плоскостью его основания. Считая высоты конусов равными 1, находим

$$AC = \operatorname{tg}\alpha, \quad OA = \frac{1}{\cos\alpha}, \quad AD = \frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}, \quad CD = \operatorname{ctg}\alpha,$$

а из рис. 48

$$DK = \sqrt{DC^2 - CK^2} = \sqrt{\operatorname{ctg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{\sqrt{\cos 2\alpha}}{\sin\alpha\cos\alpha}.$$

Теперь из пропорции

$$\frac{CK}{DK} = \frac{AP}{AD}$$

находим

$$AP = AD \cdot \frac{CK}{DK} = \frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha} \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{\cos 2\alpha}} \sin\alpha\cos\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{\cos 2\alpha}}.$$

Одна из плоскостей, касающаяся обоих конусов, — это плоскость, проходящая через прямые DO и DP. Угол этой плоскости с плоскостью сечения, изображенного на рис. 47, и есть половина одного из двугранных углов, которые образуют плоскости, касающиеся обоих конусов, но не проходящие через их общую образующую AO. Обозначая этот угол через φ, имеем

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{AP}{AO},$$

или

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{\cos 2\alpha}}.$$

Замечание. Если $2\alpha > \frac{\pi}{2}$, то конусы не имеют общих касательных плоскостей (кроме одной, проходящей через их общую образующую).

Решение варианта 8

36. Данное уравнение эквивалентно двум смешанным системам:

$$x \geqslant 0, \quad x^2 + x + a = 0; \tag{1}$$

$$x < 0, \quad x^2 - x + a = 0. \tag{2}$$

Решим смешанную систему (1). Из условия действительности корней

$$1 - 4a \geqslant 0$$

находим

$$a \leqslant \frac{1}{4}.$$

Если $0 < a \leqslant \frac{1}{4}$, то оба корня уравнения $x^2 + x + a = 0$ отрицательны. Если $a = 0$, то $x^2 + x = 0$, откуда надо взять только $x = 0$. Если $a < 0$, то корни уравнения (1) разных знаков, но корнем данного уравнения является только положительный корень

$$x = \frac{-1 + \sqrt{1 - 4a}}{2}.$$

Перейдем к системе (2). Условие действительности корней то же самое: $a \leqslant \frac{1}{4}$. Если $0 < a \leqslant \frac{1}{4}$, то корни уравнения $x^2 - x + a = 0$ положительны и не являются корнями данного уравнения. Если

$a<0$, то корни уравнения $x^2-x+a=0$ разных знаков; корнем данного уравнения является отрицательный корень

$$x=\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2}.$$

Итак, если $a\leqslant 0$, то данное уравнение имеет два корня:

$$x_{1,2}=\pm\frac{\sqrt{1-4a}-1}{2},$$

а если $a>0$, то данное уравнение корней не имеет (если $a=0$, то $x=0$).

Другой способ решения. Перепишем данное уравнение в виде

$$|x|^2+|x|+a=0.$$

Если $a>0$, то $|x|^2+|x|+a>0$ при всех значениях x. Если $a<0$, то корни этого уравнения разных знаков, а так как $|x|\geqslant 0$, то

$$|x|=\frac{-1+\sqrt{1-4a}}{2},$$

откуда

$$x=\pm\frac{\sqrt{1-4a}-1}{2}.$$

Наконец, если $a=0$, то $x=0$.

37. Перепишем данное неравенство в виде

$$\frac{\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}x}-2>0,$$

или

$$\frac{-2-\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}x}>0,$$

или

$$\frac{\operatorname{tg}x+2}{\operatorname{tg}x+1}<0.$$

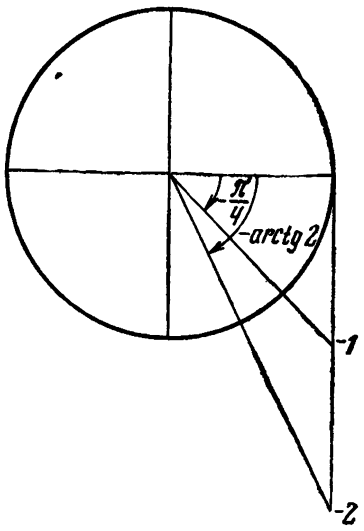

Рис. 49

Это неравенство выполнено тогда и только тогда, когда

$$-2<\operatorname{tg}x<-1,$$

значит, все решения данного неравенства

$$k\pi-\operatorname{arc\,tg}2<x<k\pi-\frac{\pi}{4},$$

где k принимает все целые значения (рис. 49).

38. Среди первых ста натуральных чисел имеется группа в 33 числа, делящихся на 3; группа в 33 числа, дающих при делении на 3 в остатке 2, и группа в 34 числа, дающих при делении на 3 в остатке 1.

Для того чтобы сумма трех чисел из первых ста натуральных разделилась на 3, необходимо и достаточно, чтобы они были выбраны все из одной группы или все из разных. Таким образом, число всех возможных выборов равно

$$2 \cdot C_{33}^3 + C_{34}^3 + 33 \cdot 33 \cdot 34 = 53\,922.$$

39. Прежде всего отметим, что искомая окружность может быть построена с помощью циркуля и линейки исходя из следующих соображений: пусть B и C — данные точки на одной из сто-

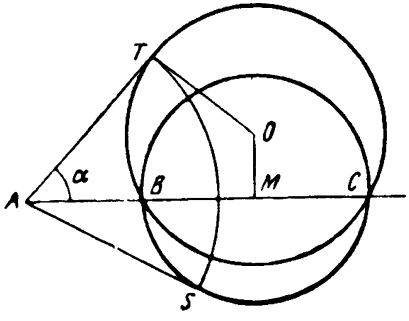

Рис. 50

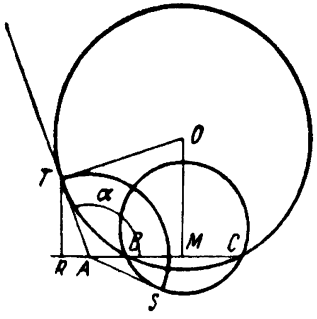

Рис. 51

рон данного угла (на рис. 50 данный угол острый, на рис. 51 — тупой). Тогда отрезок AS касательной (S — точка касания), проведенной из точки A к *любой* окружности, проходящей через точки B и C, имеет постоянную величину $(\sqrt{AB \cdot AC})$. Построив любую такую окружность и проведя к ней касательную из точки A, строим окружность с центром A и радиусом AS. Пусть T — точка, в которой эта окружность пересекает вторую сторону угла. Центр O искомой окружности является точкой пересечения прямой, проходящей через точку T перпендикулярно AT с медиатрисой отрезка BC. Для вычисления радиуса искомой окружности спроектируем $ATOM$ (M — середина BC) на прямую ABC. Считая сначала, что данный угол острый (рис. 50), получим

$$AT \cdot \cos\alpha + OT \sin\alpha = AM = \frac{AB + AC}{2},$$

и так как

$$AB = \frac{b}{\sin\alpha}, \quad AC = \frac{c}{\sin\alpha}, \quad AT = \frac{\sqrt{bc}}{\sin\alpha},$$

то

$$\frac{\sqrt{bc}}{\sin\alpha}\cos\alpha + OT\cdot\sin\alpha = \frac{b+c}{2\sin\alpha},$$

откуда

$$OT = \frac{b+c-2\sqrt{bc}\cos\alpha}{2\sin^2\alpha}. \qquad (1)$$

В случае, если α тупой угол (рис. 51), будем иметь

$$MR - AR = AM = \frac{AB+AC}{2},$$

или

$$OT\cdot\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)-\frac{\sqrt{bc}}{\sin\alpha}\cos(\pi-\alpha) = \frac{b+c}{2\sin\alpha},$$

откуда получаем для OT то же самое выражение.

Полученная формула (1) верна и при $\alpha=\frac{\pi}{2}$; при этом она принимает вид

$$OT = \frac{b+c}{2};$$

читателю рекомендуется сделать соответствующий чертеж.

40. Отложим на оси данного конуса от вершины в сторону основания отрезок $OA=1$. Опустим из точки A перпендикуляры на все образующие данного конуса; получим конус, образующая которого равна $\sin\alpha$, в то время как проекция OA на образующую данного конуса равна $\cos\alpha$. Таким образом, получаем два конуса, имеющих общее основание, которые образуются вращением вокруг гипотенузы, равной 1, прямоугольного треугольника с катетами $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$ (рис. 52).

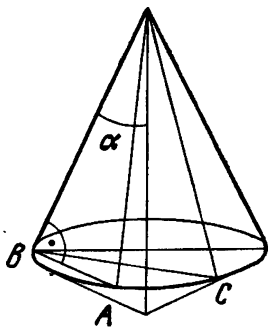

Рис. 52

Плоскости, касающиеся данного конуса по его образующим OB и OC, будут перпендикулярны тогда и только тогда, когда перпендикулярны образующие AB и AC конуса с вершиной A, т. е. тогда и только тогда, когда $BC=\sqrt{2}\sin\alpha$. Теперь из равнобедренного треугольника OBC находим синус половины угла $\varphi=\angle BOC$:

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{BC}{2} : \cos\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{2}}.$$

Заметим, что задача имеет решение тогда и только тогда, когда на указанном выше конусе с вершиной A имеются две взаимно перпендикулярные образующие, т. е. только тогда, когда угол в

осевом сечении этого конуса или тупой, или прямой. Это значит, что угол в осевом сечении данного конуса должен быть острым или прямым, т. е. $\alpha \leqslant \frac{\pi}{4}$. Если $\alpha = \frac{\pi}{4}$, то $\varphi = \frac{\pi}{2}\left(\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, значит, взаимно перпендикулярные плоскости касаются данного конуса по двум его образующим, полученным в осевом сечении.

Итак,

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{2}},$$

причем задача имеет решение только в случае $0 < \alpha \leqslant \frac{\pi}{4}$.

Вечернее отделение

Решение варианта 1

41. Прежде всего отметим, что должны быть выполнены неравенства

$$x + 1 > 0 \quad \text{и} \quad 2 - x > 0,$$

откуда

$$-1 < x < 2.$$

Теперь перепишем данное неравенство в виде

$$\log_2(x+1)\log_{\frac{1}{2}} 2 > \log_2(2-x),$$

или, так как $\log_{\frac{1}{2}} 2 = -1$, то

$$\log_2 \frac{1}{x+1} > \log_2(2-x);$$

отсюда

$$\frac{1}{x+1} > 2 - x,$$

и так как $x+1>0$, то это неравенство эквивалентно следующему

$$(2-x)(x+1) < 1,$$

или

$$x^2 - x - 1 > 0.$$

Так как корни трехчлена x^2-x-1 таковы: $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, то неравенство $x^2-x-1>0$ будет выполнено тогда и только тогда, когда

$$\text{или} \quad x < \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \quad \text{или} \quad x > \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Но так как $-1<\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $2>\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, то все решения данного неравенства

$$-1<x<\frac{1-\sqrt{5}}{2},\quad \frac{1+\sqrt{5}}{2}<x<2.$$

42. Перепишем уравнение $\sin x=\sin 2y$, или $\sin x-\sin 2y=0$, в виде

$$2\sin\frac{x-2y}{2}\cos\frac{x+2y}{2}=0.$$

Отсюда либо $x-2y=2k\pi$, либо $x+2y=(2n+1)\pi$, где k и n принимают все целые значения.

Аналогично переписывая уравнение $\cos x=\sin y$, или

$$\sin y-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=0,$$

в виде

$$2\sin\frac{x+y-\frac{\pi}{2}}{2}\cos\frac{y-x+\frac{\pi}{2}}{2}=0,$$

получаем

$$\text{либо } x+y-\frac{\pi}{2}=2m\pi,\ \text{либо } y-x+\frac{\pi}{2}=(2s+1)\pi,$$

где m и s принимают все целые значения. Таким образом, все решения данной системы — это все решения следующих четырех систем:

$$\begin{cases} x-2y=2k\pi, \\ x+y-\frac{\pi}{2}=2m\pi; \end{cases} \quad (1) \qquad \begin{cases} x-2y=2k\pi, \\ y-x+\frac{\pi}{2}=(2s+1)\pi; \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} x+2y=(2n+1)\pi, \\ x+y-\frac{\pi}{2}=2m\pi; \end{cases} \quad (3) \qquad \begin{cases} x+2y=(2n+1)\pi, \\ y-x+\frac{\pi}{2}=(2s+1)\pi. \end{cases} \quad (4)$$

где k, m, n, s принимают все целые значения. По условию задачи надо найти только те решения, которые удовлетворяют неравенствам

$$0\leqslant x\leqslant\pi,\quad 0\leqslant y\leqslant\pi.$$

Решая систему (1), получим

$$x=\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}(2m+k),$$

$$y=\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}(m-k);$$

теперь из неравенств

$$0 \leqslant \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}(2m + k) \leqslant \pi,$$

$$0 \leqslant \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}(m - k) \leqslant \pi$$

находим

$$-\frac{1}{2} \leqslant 2m + k \leqslant 1,$$

$$-\frac{1}{4} \leqslant m - k \leqslant \frac{5}{4},$$

а так как m и k целые числа, то

$$2m+k=0, \quad \text{или} \quad 2m+k=1,$$

и

$$m-k=0, \quad \text{или} \quad m-k=1.$$

Система $2m+k=0$, $m-k=0$ имеет решение $m=k=0$. Система $2m+k=0$, $m-k=1$ не имеет решений в целых числах, как и системы $2m+k=1$, $m-k=0$ и $2m+k=1$, $m-k=1$. Итак, система (1) имеет в квадрате $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $0 \leqslant y \leqslant \pi$ только одно решение:

$$x = \frac{\pi}{3}, \qquad y = \frac{\pi}{6}.$$

Решая систему (2), получим

$$x = \pi - 2k\pi - 2(2s + 1)\pi,$$

$$y = \frac{\pi}{2} - 2k\pi - (2s + 1)\pi.$$

Неравенства $0 \leqslant y \leqslant \pi$ принимают вид

$$0 \leqslant \frac{\pi}{2} - 2k\pi - (2s + 1)\pi \leqslant \pi,$$

или

$$0 \leqslant \frac{1}{2} - 2k - 2s - 1 \leqslant 1,$$

$$0 \leqslant 1 - 4k - 4s - 2 \leqslant 2,$$

$$1 \leqslant -4k - 4s \leqslant 3,$$

$$-\frac{3}{4} \leqslant k + s \leqslant -\frac{1}{4}.$$

Нет ни одной совокупности целых чисел k и s, удовлетворяющих этим условиям. Значит, система (2) в квадрате $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $0 \leqslant y \leqslant \pi$ не имеет решений.

Решая систему (3), получим

$$x = \pi + 4m\pi - (2n+1)\pi,$$

$$y = -\frac{\pi}{2} + (2n+1)\pi - 2m\pi.$$

Условия $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $0 \leqslant y \leqslant \pi$ дают $m=n=0$, так что система (3) в квадрате $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $0 \leqslant y \leqslant \pi$ имеет только одно решение:

$$x = 0, \; y = \frac{\pi}{2}.$$

Наконец, все решения системы (4):

$$x = \frac{\pi}{3} + \frac{2n+1}{3}\pi - \frac{2(2s+1)}{3}\pi,$$

$$y = -\frac{\pi}{6} + \frac{2n+1}{3}\pi + \frac{2s+1}{3}\pi.$$

Решая систему неравенств $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $0 \leqslant y \leqslant \pi$, получим $n=0$, $s=0$, так что

$$x = 0, \; y = \frac{\pi}{2},$$

то же, что уже было получено при решении системы (3).

Итак, на квадрате $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $0 \leqslant y \leqslant \pi$ данная система имеет только два решения:

$$x_1 = \frac{\pi}{3}, \; y_1 = \frac{\pi}{6} \quad \text{и} \quad x_2 = 0, \; y_2 = \frac{\pi}{2}.$$

43. Полагая $2^x = \lambda$, получим квадратное уравнение

$$\lambda^2 - 4m\lambda + 2m + 2 = 0. \qquad (1)$$

Дискриминант этого уравнения должен быть неотрицателен:

$$\triangle = 4m^2 - 2m - 2 = 4(m-1)\left(m + \frac{1}{2}\right) \geqslant 0,$$

значит, или $m \leqslant -\frac{1}{2}$, или $m \geqslant 1$. Так как по условию задачи $m<0$, то остается $m \leqslant -\frac{1}{2}$. Если $m = -\frac{1}{2}$, то уравнение (1) принимает вид

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0.$$

Оба его корня отрицательны, но так как $\lambda=2^x>0$, то при $m=-\frac{1}{2}$ данное уравнение не имеет решений. Если $-1<m<-\frac{1}{2}$, то корни уравнения (1) действительны и различны, и так как

$$\lambda_1\lambda_2=2m+2>0,$$
$$\lambda_1+\lambda_2=4m<0,$$

то λ_1 и λ_2 отрицательны. Данное уравнение опять не имеет корней.

При $m=-1$ уравнение (1) принимает вид

$$\lambda^2+4\lambda=0;$$

его корни $\lambda_1=0$, $\lambda_2=-4$, исходное уравнение не имеет корней. Если $m<-1$, то $2m+2<0$, значит, корни уравнения (1) разных знаков. Беря только положительный корень

$$\lambda=2^x=2m+\sqrt{4m^2-2m-2},$$

находим

$$x=\log_2(2m+\sqrt{4m^2-2m-2}). \qquad (2)$$

Итак, только при $m<-1$ исходное уравнение имеет один корень (2).

44. Из треугольников BQC и APC по теореме синусов находим (рис. 53)

$$\frac{CQ}{\sin\frac{B}{3}}=\frac{BC}{\sin\left(\frac{B}{3}+\frac{C}{3}\right)},\quad \frac{PC}{\sin\frac{A}{3}}=\frac{AC}{\sin\left(\frac{A}{3}+\frac{C}{3}\right)}.$$

Отсюда находим CQ и PC, а затем и площадь треугольника CPQ по формуле: пл. $\triangle CPQ=\frac{1}{2}CQ\cdot CP\sin\frac{C}{3}$. Итак,

$$\text{пл. }\triangle CPQ=\frac{1}{2}\frac{BC\cdot AC\cdot\sin\frac{A}{3}\sin\frac{B}{3}\sin\frac{C}{3}}{\sin\left(\frac{B}{3}+\frac{C}{3}\right)\sin\left(\frac{A}{3}+\frac{C}{3}\right)},$$

и так как $BC=2R\sin A$, $AC=2R\sin B$, то окончательно

$$\text{пл. }\triangle CPQ=2R^2\frac{\sin\frac{A}{3}\sin\frac{B}{3}\sin\frac{C}{3}\sin A\sin B}{\sin\left(\frac{B}{3}+\frac{C}{3}\right)\sin\left(\frac{A}{3}+\frac{C}{3}\right)}.$$

45. Так как прямая BC перпендикулярна оси вращения l, то через прямую BC можно провести плоскость, перпендикулярную

оси вращения. Пусть эта плоскость пересекает ось вращения в точке O и пусть D — проекция точки O на прямую BC. При вращении треугольника ABC вокруг оси l отрезок BC опишет плоское кольцо, образованное окружностями с центром в точке O, радиусами OD и OB, причем обе эти окружности расположены в плоско-

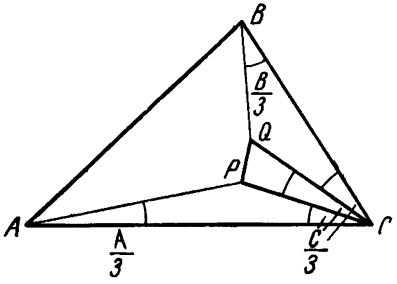

Рис. 53

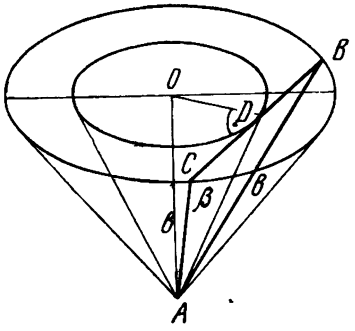

Рис. 54

сти, проходящей через точку O перпендикулярно оси вращения. Искомый объем равен разности объемов двух конусов с общей высотой AO и радиусами оснований OD и OB (рис. 54):

$$V = \pi \frac{AO}{3}(OB^2 - OD^2) = \pi \frac{AO}{3} \cdot BD^2 =$$

$$= \frac{\pi}{3} b \cos\beta \cdot \cos\frac{\alpha}{2}\left(b \sin\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \frac{\pi b^3}{3} \cos\beta \cos\frac{\alpha}{2} \sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

Решение варианта 2

46. Найдем сначала положительные корни данного уравнения. Предполагая $x>0$, получим

$$(x+1)(x-1) = -\frac{1}{2},$$

$$x^2 = \frac{1}{2},$$

откуда

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Найдем отрицательные корни данного уравнения. Предполагая, что $x<0$, будем иметь

$$(x+1)(-x-1) = -\frac{1}{2},$$

$$(x+1)^2=\frac{1}{2},$$

$$x+1=\pm\frac{1}{\sqrt{2}},$$

откуда

$$x_2=-1+\frac{1}{\sqrt{2}},\ x_3=-1-\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Заметим, что $x=0$ — не корень данного уравнения, а также то, что данное уравнение не имеет мнимых корней (докажите!).

47. Так как

$$p=-(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)=-\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta},$$

$$q=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta,$$

то данное выражение можно переписать в виде

$$\sin^2(\alpha+\beta)-\frac{\sin^2(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\cos^2(\alpha+\beta)=$$

$$=\sin^2(\alpha+\beta)\frac{\cos\alpha\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\cos^2(\alpha+\beta)=$$

$$=\sin^2(\alpha+\beta)\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+\cos^2(\alpha+\beta)\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta=q.$$

48. Отметим прежде всего, что данные радикалы — действительные числа тогда и только тогда, когда

$$-1\leqslant x\leqslant 3.$$

При выполнении этих соотношений данное неравенство эквивалентно следующему:

$$\sqrt{3-x}>\frac{1}{2}+\sqrt{x+1},\qquad(1)$$

или

$$3-x>\frac{1}{4}+\sqrt{x+1}+x+1,$$

так как и левая, и правая части неравенства (1) состоят из неотрицательных чисел. Переписывая последнее неравенство в виде

$$7-8x>4\sqrt{x+1},\qquad(2)$$

заключаем, что это неравенство не имеет решений среди всех значений x, для которых $7-8x\leqslant 0$, т. е. $x\geqslant\frac{7}{8}$. Итак, должно быть

$$-1\leqslant x<\frac{7}{8}.$$

При выполнении этих условий неравенство (2) эквивалентно следующему:

$$49 - 112x + 64x^2 > 16x + 16,$$

или

$$64x^2 - 128x + 33 > 0. \qquad (3)$$

Корни уравнения

$$64x^2 - 128x + 33 = 0$$

таковы:

$$\frac{8 \pm \sqrt{31}}{8} = 1 \pm \frac{\sqrt{31}}{8}.$$

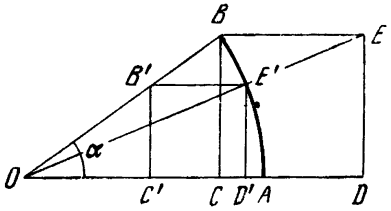

Рис. 55

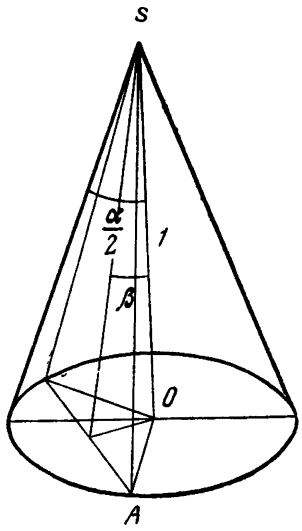

Рис. 56

Неравенство (3) выполнено тогда и только тогда, когда

$$\text{или } x < 1 - \frac{\sqrt{31}}{8}, \text{ или } x > 1 + \frac{\sqrt{31}}{8}.$$

Но так как $1 + \frac{\sqrt{31}}{8} > \frac{7}{8}$, то остается $x < 1 - \frac{\sqrt{31}}{8}$; так как $1 - \frac{\sqrt{31}}{8} < \frac{7}{8}$, то окончательно все решения данного неравенства:

$$-1 \leqslant x < 1 - \frac{\sqrt{31}}{8}.$$

49. Покажем, как можно построить искомый квадрат (с помощью циркуля и линейки): опустим из точки B перпендикуляр BC на прямую OA. Отложим на продолжении отрезка OC за точку C отрезок $CD = BC$. Проведем через точки B и D прямые, соответственно перпендикулярные прямым BC и CD; пусть E — точка пересечения построенных прямых. Произведем гомотетию с центром O, при которой точка E квадрата $BCDE$ перейдет в точку E', лежащую на дуге $\overset{\frown}{AB}$; тогда квадрат $BCDE$ перейдет в искомый квадрат $B'C'D'E'$ (точка E' — точка пересечения прямой OE и дуги $\overset{\frown}{AB}$; точка B' — точка пересечения прямой OB с прямой, проходящей через точку E' параллельно прямой OA; точки C' и D' — проекции точек B' и E' на прямую OA). Не нарушая общности,

можно считать $OA=OB=1$. Тогда $BC=ED=CD=\sin\alpha$, $OC=\cos\alpha$, значит, коэффициент гомотетии, при которой квадрат $BCDE$ переходит в квадрат $B'C'D'E'$, равен (рис. 55)

$$k=\frac{OE'}{OE}=\frac{1}{\sqrt{(\cos\alpha+\sin\alpha)^2+\sin^2\alpha}}.$$

Значит, сторона x квадрата $B'C'D'E'$ равна

$$x=\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1+\sin 2\alpha+\sin^2\alpha}},$$

а искомое отношение площади этого квадрата к площади сектора $O\breve{A}B$ равно

$$\frac{x^2}{\frac{\alpha}{2}}=\frac{2x^2}{\alpha}=\frac{2\sin^2\alpha}{\alpha(1+\sin 2\alpha+\sin^2\alpha)}$$

(α — мера угла $\angle AOB$ в радианах).

50. Не нарушая общности, можно считать высоту конуса равной 1. Тогда радиус окружности, лежащей в основании конуса, равен $OA=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, а расстояние от центра O окружности, лежащей в основании конуса до прямой, по которой указанная в условии секущая плоскость пересекает основание конуса, равно $OB=\operatorname{tg}\beta$. Так как $\angle OBA=\frac{\pi}{2}$, то

$$AB=\sqrt{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}-\operatorname{tg}^2\beta}=\frac{\sqrt{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\beta}.$$

Пусть S — вершина конуса, а x — искомый угол. Тогда $\angle ASB=\frac{x}{2}$, и так как $SB=\frac{1}{\cos\beta}$, то (рис. 56)

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{AB}{BS}=\frac{\sqrt{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)}}{\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Решение варианта 3

51. Перепишем данное неравенство так:

$$x+1-\frac{2}{x}<0,$$

или

$$\frac{x^2+x-2}{x}<0,$$

или

$$\frac{(x+2)(x-1)}{x}<0.$$

Отсюда находим все решения данного неравенства: $-\infty<x<-2$ и $0<x<1$.

52. Данное уравнение эквивалентно следующей смешанной системе:

$$\cos x \leqslant 0,$$

$$\sin x \geqslant 0,$$

$$(\sqrt{\sin x})^2 = (-\cos x)^2,$$

или

$$\sin x \geqslant 0,\ \cos x \leqslant 0,\ \sin^2 x + \sin x - 1 = 0.$$

Отсюда

$$\sin x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

и в силу условия $\cos x \leqslant 0$ все решения:

$$x = (2k+1)\pi - \arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

где k принимает все целые значения.

53. Систему рациональных уравнений естественно решать над полем комплексных чисел. Поэтому найдем не только действительные, но и мнимые решения данной системы. Прежде всего заметим, что данная система эквивалентна следующей:

$$2x^2 = y(1+x^2), \qquad (1)$$

$$2y^2 = x(1+y^2),$$

так как $x=i$ не удовлетворяет первому из этих уравнений, а $y=i$ — второму (отсюда следует, что если x, y — решение системы (1), то x, y является решением и данной системы). Система (1) эквивалентна следующей:

$$2x^2 - 2y^2 = y(1+x^2) - x(1+y^2),$$

$$2y^2 = x(1+y^2),$$

или

$$(x-y)(2x+2y+1-xy) = 0,$$

$$2y^2 = x(1+y^2).$$

Эта система распадается на две:

$$\begin{aligned} x - y &= 0, \\ 2y^2 &= x(1+y^2); \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} 2x + 2y + 1 - xy &= 0, \\ 2y^2 &= x(1+y^2). \end{aligned} \tag{3}$$

Система (2) эквивалентна такой:

$$\begin{aligned} y &= x, \\ 2y^2 &= y(1+y^2); \end{aligned}$$

отсюда

$$x_1 = 0,\ y_1 = 0;\ x_2 = 1,\ y_2 = 1.$$

Система (3) эквивалентна следующей (докажите!):

$$2 \cdot \frac{2y^2}{1+y^2} + 2y + 1 - y\frac{2y^2}{1+y^2} = 0,$$

$$2x + 2y + 1 - xy = 0,$$

или

$$5y^2 + 2y + 1 = 0, \tag{4}$$

$$2x + 2y + 1 - xy = 0. \tag{5}$$

Из первого уравнения находим

$$y_3 = \frac{-1+2i}{5},\quad y_4 = \frac{-1-2i}{5};$$

теперь из уравнения (5) находим

$$x = \frac{2y+1}{y-2}, \tag{6}$$

следовательно,

$$x_3 = \frac{2\dfrac{2i-1}{5}+1}{\dfrac{2i-1}{5}-2} = \frac{4i+3}{2i-11} = \frac{(4i+3)(2i+11)}{-125} = \frac{-1-2i}{5},$$

$$x_4 = \frac{2\dfrac{-2i-1}{5}+1}{\dfrac{-2i-1}{5}-2} = \frac{-1+2i}{5}.$$

Итак, данная система имеет четыре решения:

$$x_1 = 0, \quad y_1 = 0;$$

$$x_2 = 1, \quad y_2 = 1;$$

$$x_3 = \frac{-1-2i}{5}, \quad y_3 = \frac{-1+2i}{5};$$

$$x_4 = \frac{-1+2i}{5}, \quad y_4 = \frac{-1-2i}{5}.$$

54. Из треугольника APB находим (рис. 57)

$$\frac{BP}{\sin 30^\circ} = \frac{a\sqrt{2}}{\sin 67^\circ 30'},$$

откуда

$$BP = \frac{a}{\sqrt{2}\cos 22^\circ 30'}.$$

Далее,

$$BD = BO \cdot \cos 22^\circ 30',$$

и так как $BD = \frac{a}{\sqrt{2}}$, то

$$BO = \frac{a}{\sqrt{2}\cos 22^\circ 30'}.$$

Таким образом, $\triangle PBO$ равнобедренный, значит,

$$\frac{PO}{2} = \frac{a}{\sqrt{2}\cos 22^\circ 30'} \cdot \sin 7^\circ 30';$$

отсюда

$$PO = \frac{a\sqrt{2}\sin 7^\circ 30'}{\cos 22^\circ 30'} = a\sqrt{2}\,\frac{\sin\left(\frac{\pi}{8}-\frac{\pi}{12}\right)}{\cos\frac{\pi}{8}} =$$

$$= a\sqrt{2}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{12} - \sin\frac{\pi}{12}\right) =$$

$$= a\sqrt{2}\left[\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{4}}\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\right] =$$

$$= a\sqrt{2}\left[(\sqrt{2}-1)\left(\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}}{4}\right) - \left(\frac{\sqrt{6}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\right] =$$

$$= \frac{1+\sqrt{3}-\sqrt{6}}{\sqrt{2}}a.$$

55. Пусть $ABCD$ — квадрат, лежащий в основании пирамиды $SABCD$ (рис. 58). Проведем сечение, параллельное высоте и двум сторонам квадрата AB и CD. Пусть секущая плоскость пересечет стороны SD и SC в точках P и Q, а стороны основания BC и DA в точках R и S' (рис. 58). Сечение представляет собой трапецию: PQ и RS' — основания, RQ и PS' — боковые стороны. Полагая

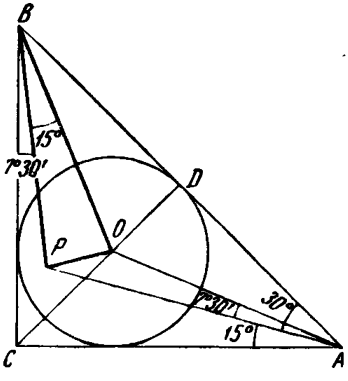

Рис. 57

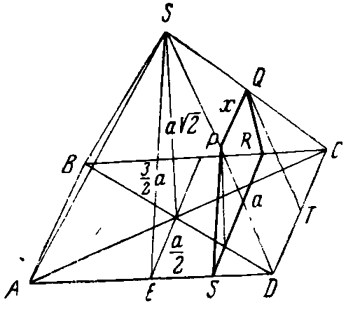

Рис. 58

$PQ=x$ и замечая, что $RS'=a$, из условия, что в эту трапецию можно вписать окружность, находим

$$PS' = QR = \frac{a+x}{2}.$$

Пусть E — проекция точки S на сторону AD (SE — апофема грани ASD). Так как высота пирамиды равна $a\sqrt{2}$, то $SE = \sqrt{\frac{a^2}{4} + 2a^2} = \frac{3}{2}a$. Теперь проведем через точку Q прямую $QT \| PD$ (T — точка, лежащая на стороне основания CD).

Из подобия треугольников находим

$$\frac{SE}{PS} = \frac{SD}{PD} = \frac{SD}{QT} = \frac{DC}{TC},$$

т. е.

$$\frac{\frac{3}{2}a}{\frac{a+x}{2}} = \frac{a}{a-x},$$

откуда $x = \frac{a}{2}$, значит, периметр трапеции $PQRS$ равен

$$2(x+a) = 3a.$$

Решение варианта 4

56. Так как при $x>0$ и $x\neq 1$

$$x^{\frac{1}{\lg x}} = 10^{\lg x \cdot \frac{1}{\lg x}} = 10,$$

то данное неравенство эквивалентно следующей смешанной системе:

$$10 \lg x < 1, \quad x \neq 1.$$

Отсюда

$$0 < x < 1, \quad 1 < x < \sqrt[10]{10}.$$

57. Перепишем данное уравнение в виде

$$(\cos x + \sin x)^2 = \operatorname{tg} x\,(\cos^2 x - \sin^2 x);$$

отсюда

$$\cos x + \sin x = 0,$$

$$\operatorname{tg} x = -1,$$

$$x = k\pi - \frac{\pi}{4}.$$

Остается решить уравнение

$$\cos x + \sin x = \operatorname{tg} x\,(\cos x - \sin x),$$

или

$$\cos x + \sin x = \sin x - \frac{\sin^2 x}{\cos x},$$

или

$$\cos x + \frac{\sin^2 x}{\cos x} = 0,$$

или

$$\frac{1}{\cos x} = 0.$$

Это уравнение решений не имеет. Итак, все решения данного уравнения:

$$x = k\pi - \frac{\pi}{4},$$

где k принимает все целые значения.

58. Прежде всего заметим, что данное уравнение может иметь корни, заключенные между a и -1 (при $a=-1$ уравнение корней не имеет). Пусть $a<-1$. Тогда корни данного уравнения должны удовлетворять условию $a<x<-1$, так как при этих и только при этих значениях x функция $\frac{a-x}{1+x}$ принимает положительные значения.

Полагая

$$\sqrt[4]{\frac{a-x}{1+x}}=\lambda$$

и замечая, что $\lambda>0$, получим

$$\lambda-\frac{1}{\lambda}=2,$$

$$\lambda^2-2\lambda-1=0,$$

$$\lambda=1+\sqrt{2}.$$

Таким образом,

$$\sqrt[4]{\frac{a-x}{1+x}}=1+\sqrt{2},$$

значит,

$$\frac{a-x}{1+x}=(1+\sqrt{2})^4,$$

$$a-x=(1+\sqrt{2})^4+x(1+\sqrt{2})^4,$$

$$x=\frac{a-(1+\sqrt{2})^4}{1+(1+\sqrt{2})^4};$$

неравенства

$$a<\frac{a-(1+\sqrt{2})^4}{1+(1+\sqrt{2})^4}<-1$$

выполняются, так как неравенство

$$a<\frac{a-(\sqrt{2}+1)^4}{1+(\sqrt{2}+1)^4}$$

эквивалентно неравенству

$$(a+1)(1+\sqrt{2})^4<0,$$

которое в силу условия $a<-1$ выполняется. Неравенство

$$\frac{a-(1+\sqrt{2})^4}{1+(\sqrt{2}+1)^4}<-1,$$

или

$$\frac{a+1}{1+(\sqrt{2}+1)^4}<0,$$

также выполняется.

Если $a>-1$, то корни данного уравнения должны удовлетворять условию $-1<x<a$. Полагая, как и выше,

$$\sqrt[4]{\frac{a-x}{1+x}}=\lambda,$$

находим

$$x=\frac{a-(1+\sqrt{2})^4}{1+(1+\sqrt{2})^4}. \tag{1}$$

Теперь находим

$$x+1=\frac{a+1}{1+(1+\sqrt{2})^4}>0,$$

$$a-x=a-\frac{a-(1+\sqrt{2})^4}{1+(1+\sqrt{2})^4}=\frac{(a+1)(1+\sqrt{2})^4}{1+(1+\sqrt{2})^4}>0,$$

так что в случае $a>-1$ соотношением (1) определяется корень данного уравнения.

Итак, если $a\neq-1$, то данное уравнение имеет один корень

$$x=\frac{a-(1+\sqrt{2})^4}{1+(1+\sqrt{2})^4}.$$

Если $a=-1$, то данное уравнение не имеет корней.

59. Пусть (O_1), (O_2), (O_3) — окружности с центрами O_1, O_2, O_3, каждая из которых внешним образом касается двух других, причем радиусы этих окружностей соответственно равны 1, 2 и 3 (рис. 59). Пусть A — точка касания окружностей (O_2) и (O_3), B — точка касания окружностей (O_3) и (O_1), а C — точка касания окружностей (O_1) и (O_2). Положим $O_2O_3=a$, $O_3O_1=b$, $O_1O_2=c$; тогда $O_1C=O_1B=p-a$, $O_2A=O_2C=p-b$, $O_3B=O_3A=p-c$, где p — полупериметр треугольника $O_1O_2O_3$. Отсюда следует, что окружность (ABC), проходящая через точки A, B и C, является окружностью, вписанной в треугольник $O_1O_2O_3$. Последний треугольник прямоугольный $\left(\angle O_2O_1O_3=\frac{\pi}{2}\right)$ с катетами $O_1O_2=3$, $O_1O_3=4$ и гипотенузой $O_2O_3=5$. Пусть O — центр окружности (ABC). Тогда

$$\angle BAC=\frac{1}{2}\angle BOC=\frac{\pi}{4},\quad \angle ACB=\frac{1}{2}\angle AOB=\frac{1}{2}(\pi-\angle O_1O_3O_2)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\pi-\operatorname{arctg}\frac{3}{4}\right)=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{3}{4}=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{1}{3}=$$

$$= \operatorname{arcctg} \frac{1}{3},\ \angle CBA = \frac{1}{2} \angle COA = \frac{1}{2}(\pi - \angle O_1O_2O_3) =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{4}{3} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1}{2} = \operatorname{arcctg} \frac{1}{2} = \operatorname{arctg} 2.$$

Итак, углы треугольника ABC:

$$\frac{\pi}{4},\ \operatorname{arctg} 2 \text{ и } \operatorname{arctg} 3.$$

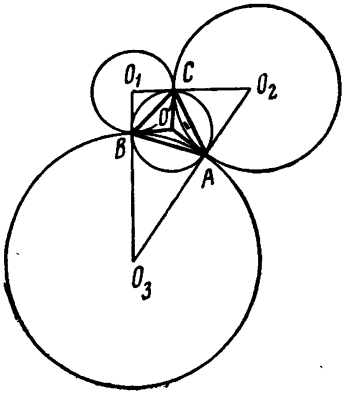

Рис. 59

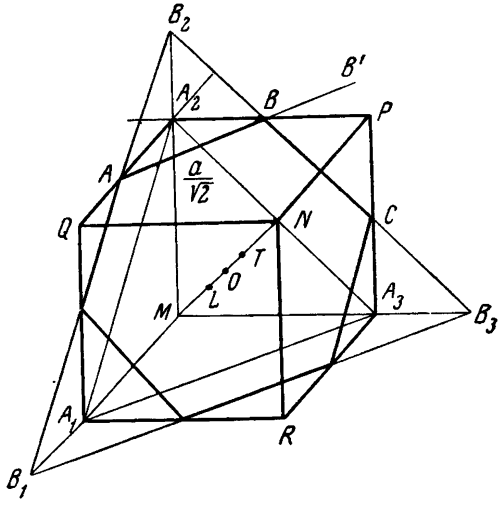

Рис. 60

60. Пусть O — середина диагонали MN куба (рис. 60). Плоскость $A_1A_2A_3$, проходящая через концы A_1, A_2, A_3 ребер MA_1, MA_2, MA_3 куба, отсекает от его диагонали MN отрезок $ML = \frac{1}{3}MN$ (это верно и для произвольного параллелепипеда!), а кроме того, плоскость $A_1A_2A_3$ перпендикулярна диагонали куба ($MR \perp A_1A_3$, следовательно, и наклонная MN перпендикулярна A_1A_3 и т. д.). Отсюда следует, что если продолжить отрезки MA_1, MA_2 и MA_3 за точки A_1, A_2, A_3 на расстояния $MB_1 = \frac{3}{2}MA_1$, $MB_2 = \frac{3}{2}MA_2$, $MB_3 = \frac{3}{2}MA_3$, то плоскость $B_1B_2B_3$ перпендикулярна диагонали MN и делить ее пополам. Прямая B_1B_3 делит ребра RA_1 и RA_3 куба пополам. Прямая B_3B_2 делит пополам ребра куба PA_3 и PA_2; наконец, прямая B_2B_1 делит пополам ребра QA_2 и QA_1.

Таким образом, в сечении получается шестиугольник, стороны которого равны $\frac{a}{\sqrt{2}}$. Этот шестиугольник правильный, так как его противоположные стороны параллельны между собой и каж-

дая из них параллельна одной из сторон равностороннего треугольника $A_1A_2A_3$. Площадь правильного шестиугольника со стороной $\frac{a}{\sqrt{2}}$ равна $\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$.

ВОПРОСЫ, ПРЕДЛАГАВШИЕСЯ НА УСТНОМ ЭКЗАМЕНЕ ПО МАТЕМАТИКЕ НА ФИЗИЧЕСКОМ ФАКУЛЬТЕТЕ

На устном экзамене по математике прежде всего предлагались теоретические вопросы по программе для поступающих в высшие учебные заведения. Помимо этих вопросов давались дополнительные вопросы. Некоторые из них мы и приводим ниже. К части этих вопросов даны решения, к части — указания, а к части — ответы.

1. Найти на плоскости множество всех точек M, координаты x и y которых удовлетворяют следующему условию: число z^2+z+1 — действительное и положительное ($z=x+iy$, где x и y — координаты точки M).

Решение.

$$z^2+z+1=(x+yi)^2+x+yi+1=x^2-y^2+x+1+(2x+1)yi.$$

Отсюда

$$(2x+1)y=0, \tag{1}$$

$$x^2-y^2+x+1>0. \tag{2}$$

Из соотношения (1) следует, что либо $y=0$, либо $2x+1=0$, т. е. $x=-\frac{1}{2}$. Если $y=0$, то неравенство (2) принимает вид $x^2+x+1>0$ и выполняется при всех действительных значениях x. Если $x=-\frac{1}{2}$, то неравенство (2) принимает вид

$$\frac{3}{4}-y^2>0,$$

откуда:

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}<y<\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Таким образом, неравенство $z^2+z+1>0$ выполняется тогда и только тогда, когда точка M с координатами x и y или любая точка оси Ox ($y=0$), или любая точка отрезка AB с концами $A\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $B\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ (сами точки A и B исключаются). Читателю рекомендуется сделать чертеж.

2. Дано: $\frac{1}{x}>\frac{1}{y}$; что больше x или y?

Ответ. Если x и y одного знака, то $x<y$, а если x и y разных знаков (т. е. $x>0$, а $y<0$), то $x>y$.

3. Может ли простое число быть четным?

Ответ. Только число 2.

4. Рассмотрим два уравнения над полем действительных чисел:

$$A \cdot B = 0 \qquad (1)$$

и

$$B = 0. \qquad (2)$$

Можно ли утверждать, что любой корень уравнения (1) является также корнем уравнения (2)?

Можно ли утверждать, что любой корень уравнения (2) является также корнем уравнения (1)?

Ответ. Неверно ни то, ни другое; примеры:

1) $x(x-1)=0$ (1), $x-1=0$; (2)

2) $(x-2)\arcsin x=0$ (1), $x-2=0$. (2)

5. Решить неравенство

$$\sin x > a, \qquad (1)$$

где a — действительный параметр.

Ответ. Если $a<-1$, то неравенство выполняется при всех действительных значениях x. Если $a=-1$, то неравенство (1) выполняется при всех действительных значениях x, кроме $x=2k\pi-\frac{\pi}{2}$, где k принимает все целые значения. Если $-1<a<1$, то все решения данного неравенства:

$$2k\pi + \arcsin a < x < \pi - \arcsin a + 2k\pi,$$

где k принимает все целые значения. Если $a \geqslant 1$, то неравенство (1) решений не имеет.

6. Найти на плоскости множество всех точек M, координаты x и y которых удовлетворяют неравенству $\operatorname{tg} x > \operatorname{tg} y$.

Указание. Если $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$, то из неравенства $\operatorname{tg} x > \operatorname{tg} y$ следует, что $x>y$, и обратно. Множество всех точек, координаты x и y которых удовлетворяют неравенствам

$$-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2},$$

состоит из всех точек, лежащих внутри квадрата с вершинами

$$A\left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right), \quad B\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad C\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad D\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$$

(читателю рекомендуется сделать чертеж). Множество всех точек, лежащих внутри этого квадрата, координаты которых удовлетворяют условию $x>y$, — это множество всех точек, лежащих внутри треугольника CDA.

Разделим теперь всю плоскость на квадраты прямыми $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $y=\frac{\pi}{2}+n\pi$, где k и n принимают все целые значения. Пусть $A'B'C'D'$ — любой из этих квадратов (он получается из квадрата $ABCD$ *переносом*). Множество всех точек плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенству $\operatorname{tg}x>\operatorname{tg}y$, состоит из всех точек, лежащих внутри всех треугольников $C'D'A'$ (соответствующих всевозможным указанным выше переносам треугольника CDA). Читателю рекомендуется сделать чертеж.

7. Решить уравнения:

$$1)\ \operatorname{tg}(\sin x)=0;$$

$$2)\ \sin(\operatorname{tg}x)=0.$$

Ответ: 1) $x=k\pi$, где k принимает все целые значения; 2) $x=n\pi+\operatorname{arc\,tg}(k\pi)$, где k и n принимают все целые значения.

8. Найти наименьшее значение функции $y=x^2+x+1$, считая, что x изменяется на сегменте $a\leqslant x\leqslant b$.

Ответ: Если $a\leqslant-\frac{1}{2}\leqslant b$, то данная функция принимает наименьшее значение при $x=-\frac{1}{2}$, и это наименьшее значение функции равно $\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+1=\frac{3}{4}$.

Если $a>-\frac{1}{2}$, то наименьшее значение данной функции равно

$$y_{\min}=a^2+a+1.$$

Если $b<-\frac{1}{2}$, то наименьшее значение данной функции равно

$$y_{\min}=b^2+b+1.$$

Читателю рекомендуется сделать соответствующие чертежи.

9. Найти наибольшее значение функции

$$y=x^2+x+1,$$

считая, что x изменяется на отрезке $a\leqslant x\leqslant b$.

Ответ: Если $\frac{a+b}{2}=-\frac{1}{2}$, или $a+b=-1$, то данная функция принимает наибольшее значение при $x=a$ и при $x=b$:

$$y_{\max}=a^2+a+1=b^2+b+1.$$

Если $\frac{a+b}{2} > -\frac{1}{2}$, или $a+b > -1$, то $y_{\max} = b^2 + b + 1$. Если $a+b < -1$, то $y_{\max} = a^2 + a + 1$. Читателю рекомендуется сделать соответствующие чертежи.

10. Найти наименьшее значение функции

$$y = ax^2 + x + 1,$$

считая, что x изменяется на сегменте $2 \leqslant x \leqslant 3$.

Если $a=0$, то $y=x+1$, значит, $y_{\min}=2+1=3$.

Если $a > 0$, то функция $y = ax^2 + x + 1$ возрастает в полуинтервале $\left[-\frac{1}{2a}, +\infty\right)$, значит, ее наименьшее значение на сегменте $2 \leqslant x \leqslant 3$ таково: $y_{\min} = a \cdot 2^2 + 2 + 1 = 4a + 3$.

Если $a < 0$ и $\frac{3+2}{2} = -\frac{1}{2a}$, т. е. $a = -\frac{1}{5}$,

то наименьшее значение на сегменте [2, 3] данная функция

$$y = -\frac{1}{5}x^2 + x + 1$$

принимает при $x=2$ и при $x=3$:

$$y_{\min} = -\frac{4}{5} + 2 + 1 = -\frac{9}{5} + 3 + 1 = \frac{11}{5}.$$

Если $\frac{3+2}{2} > -\frac{1}{2a}$, т. е. $-\frac{1}{5} < a < 0$, то данная функция

$$y = ax^2 + x + 1$$

принимает наименьшее значение при $x=3$:

$$y_{\min} = 9a + 4,$$

а если $\frac{3+2}{2} < -\frac{1}{2a}$, т. е. $a < -\frac{1}{5}$, то данная функция принимает наименьшее значение при $x = 2$;

$$y_{\min} = 4a + 3.$$

11. Найти наибольшее значение функции

$$y = ax^2 + x + 1,$$

считая, что x изменяется на сегменте $2 \leqslant x \leqslant 3$.

Ответ: Если $a=0$, то $y=x+1$, значит, $y_{\max}=3+1=4$. Если $a>0$, то функция $y=ax^2+x+1$ возрастает на полуинтервале $\left[-\frac{1}{2a}, +\infty\right)$ и, значит, наибольшее значение данная функция принимает при $x=3$:

$$y_{\max} = 9a + 4.$$

Если $a<0$ и если $2\leqslant -\frac{1}{2a}\leqslant 3$, т. е.

$$-\frac{1}{4}\leqslant a\leqslant -\frac{1}{6},$$

то наибольшее значение данная функция принимает при $x=-\frac{1}{2a}$:

$$y_{\max}=\frac{4a-1}{4a}.$$

Если $2>-\frac{1}{2a}$, т. е. $a<-\frac{1}{4}$, то наибольшее значение данная функция принимает при $x=2$, так как на полуинтервале $\left[-\frac{1}{2a}, +\infty\right]$ эта функция убывающая:

$$y_{\max}=4a+3.$$

Наконец, если $3<-\frac{1}{2a}$, т. е. $a>-\frac{1}{6}$, то данная функция принимает наибольшее значение при $x=3$, так как на полуинтервале $\left(-\infty, -\frac{1}{2a}\right)$ она возрастающая:

$$y_{\max}=9a+4.$$

Читателю рекомендуется сделать соответствующие чертежи.

12. Решить неравенство

$$\log_{\cos x}\sin x<1.$$

Ответ. $\frac{\pi}{4}+2k\pi<x<\frac{\pi}{2}+2k\pi$, где k принимает все целые значения.

13. Решить неравенство

$$b=\log_a\cos x>0,$$

где

$$a=\log_{\frac{\sqrt{3}}{3}}\operatorname{tg} x.$$

Решение. Если взять $0\leqslant x\leqslant 2\pi$, то из этих значений x только при $0<x<\frac{\pi}{2}$ существуют функции b и a. Итак, пусть $0<x<\frac{\pi}{2}$. Тогда при $0<x<\frac{\pi}{6}$ будем иметь $a>1$, при $x=\frac{\pi}{6}$ $a=1$, а при $\frac{\pi}{6}<x<\frac{\pi}{4}$ будем иметь $0<a<1$ и, наконец, при $\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2}$ будем иметь $a\leqslant 0$. Надо оставить только $a>1$ и $0<a<1$,

т. е. $0<x<\frac{\pi}{6}$ и $\frac{\pi}{6}<x<\frac{\pi}{4}$. Но если $a>1$, то $\log_a \cos x \leqslant 0$ (считаем $\cos x>0$), а если $0<a<1$, то $\log_a \cos x>0$ $(0<\cos x<1)$. Итак, решениями исходного неравенства будут все значения x из интервала $\frac{\pi}{6}<x<\frac{\pi}{4}$, а все решения неравенства:

$$2k\pi+\frac{\pi}{6}<x<2k\pi+\frac{\pi}{4},$$

где k принимает все целые значения.

14. Дано $z=\cos\varphi+i\sin\varphi$, где $\varphi\neq k\pi$ (k — целое число). Найти модуль и аргумент комплексного числа

$$u=\frac{z+1}{z-1}.$$

Решение.

$$u=\frac{\cos\varphi+i\sin\varphi+1}{\cos\varphi+i\sin\varphi-1}=\frac{2\cos^2\frac{\varphi}{2}+2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}i}{-2\sin^2\frac{\varphi}{2}+2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}i},$$

и так как $\sin\frac{\varphi}{2}\neq 0$ $(\varphi\neq k\pi)$, то

$$u=\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\,\frac{\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2}}{-\sin\frac{\varphi}{2}+i\cos\frac{\varphi}{2}}=\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\,\frac{-i\left(-\sin\frac{\varphi}{2}+i\cos\frac{\varphi}{2}\right)}{-\sin\frac{\varphi}{2}+i\cos\frac{\varphi}{2}}=$$

$$=-i\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}.$$

Отсюда следует, что

$$|u|=\left|\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\right|$$

и, далее, если $\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}>0$, т. е. если

$$2k\pi<\varphi<(2k+1)\pi,$$

где k — любое целое число, то

$$u=\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right],$$

значит, аргумент u равен:

$$\arg u=-\frac{\pi}{2}+2k\pi,$$

где k принимает все целые значения.

Если же $\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}<0$, т. е. если

$$(2k-1)\pi<\varphi<2k\pi,$$

где k — любое целое число, то

$$u=-\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right),$$

значит,

$$\arg u=2k\pi+\frac{\pi}{2},$$

где k принимает все целые значения.

15. Доказать, что если n — натуральное число, большее 5, то

$$2^n\cdot n!<n^n.$$

Р е ш е н и е. Надо доказать, что если $n>5$, то

$$\frac{2^n\cdot n!}{n^n}<1.$$

Рассмотрим последовательность

$$x_n=\frac{2^n\cdot n!}{n^n}.$$

Имеем

$$\frac{x_n}{x_{n+1}}=\frac{2^n\cdot n!\,(n+1)^{n+1}}{n^n\cdot 2^{n+1}(n+1)!}=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{2}=\frac{1+1+\ldots}{2}>1 \text{ для } n>1,$$

значит, $x_n>x_{n+1}$, т. е. x_n — убывающая последовательность.

Далее находим

$$x_1=\frac{2\cdot 1}{1}=2,$$

$$x_2=\frac{4\cdot 2}{4}=2,$$

$$x_3=\frac{8\cdot 6}{27}=\frac{16}{9},$$

$$x_4=\frac{16\cdot 24}{4^4}=\frac{3}{2},$$

$$x_5=\frac{32\cdot 120}{5^5}=\frac{768}{625},$$

$$x_6=\frac{2^6\cdot 720}{6^6}=\frac{80}{81}<1;$$

но $x_7<x_6$, значит, $x_7<1$; $x_8<x_7$, значит, $x_8<1$ и т. д.; вообще $x_n<1$ при $n>5$, а это и надо было доказать.

16. Найти знаменатель геометрической прогрессии, зная, что сумма пяти ее членов, идущих подряд, равна 0.

Решение.

$$a+aq+aq^2+aq^3+aq^4=0.$$

Отсюда либо $a=0$; тогда q — любое число. Либо, если $a\neq 0$, то

$$q^4+q^3+q^2+q+1=0,$$

$$(q^2+1)^2+q(q^2+1)-q^2=0,$$

$$\left(q^2+1+\frac{q}{2}\right)^2-\frac{5q^2}{4}=0,$$

$$\left(q^2+1+\frac{q}{2}+\frac{\sqrt{5}q}{2}\right)\left(q^2+1+\frac{q}{2}-\frac{\sqrt{5}q}{2}\right)=0.$$

Решая уравнения

$$q^2+\frac{1+\sqrt{5}}{2}q+1=0,$$

$$q^2+\frac{1-\sqrt{5}}{2}q+1=0,$$

найдем четыре значения для q:

$$q_{1,2}=\frac{1}{4}(-1-\sqrt{5}\pm i\sqrt{10-2\sqrt{5}}),$$

$$q_{3,4}=\frac{1}{4}(-1+\sqrt{5}\pm i\sqrt{10+2\sqrt{5}}).$$

17. Сколько всего различных разбиений на пары можно сделать из 10 человек?

Решение. Рассмотрим какую-нибудь одну (из 10!) перестановку из 10 лиц:

$$a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9a_{10}.$$

Поставим этой перестановке в соответствие следующее разбиение на пары:

$$(a_1, a_2),\quad (a_3, a_4),\quad (a_5, a_6),\quad (a_7, a_8),\quad (a_9, a_{10}). \qquad (1)$$

Подсчитаем число всех перестановок, которым соответствует одно и то же разбиение на пары. Эти перестановки мы получим, переставляя всеми способами пары (1); число всех таких перестановок пар равно $5!=120$.

Кроме того, внутри каждой пары можно менять местами порядок лиц; таким путем из одного и того же разбиения (1) можно

получить 2^5 перестановок, каждой из которых ставится в соответствие одно и то же разбиение (1) в пары. Итак, число различных разбиений в пары будет

$$\frac{10!}{5!\,2^5} = 945 \text{ способов.}$$

18. Сколько существует на плоскости различных комбинаций из пяти точек:

$$M_1(a_1, a_2),\quad M_2(a_3, a_4),\quad M_3(a_5, a_6),\quad M_4(a_7, a_8),\quad M_5(a_9, a_{10}),$$

где все числа $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}$ отличны друг от друга и каждое из них равно одному из чисел:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.$$

Ответ. $\frac{10!}{5!} = 30\,240$ комбинаций (см. предыдущий вопрос).

19. Вычислить следующую сумму:

$$s = 7 + 77 + 777 + \ldots + 7_n$$

$$(7_n = \underbrace{777\ldots77}_{n \text{ цифр}}).$$

Решение.

$$s = \frac{7}{9}(9 + 99 + 999 + \ldots + 9_n) =$$

$$= \frac{7}{9}(10 - 1 + 100 - 1 + 1000 - 1 + \ldots + 10^n - 1) =$$

$$= \frac{7}{9}(1 + 10 + 10^2 + \ldots + 10^n - n - 1) = \frac{7}{9}(1_{n+1} - n - 1) =$$

$$= \frac{7}{9}\left(\frac{1}{9} \cdot 9_{n+1} - n - 1\right) = \frac{7}{9}\left(\frac{10^{n+1} - 1}{9} - n - 1\right).$$

20. Доказать, что если последовательность a_n — арифметическая прогрессия, то

$$a_1 - C_n^1 a_2 + C_n^2 a_3 - \ldots + (-1)^{n-1} a_n = 0.$$

Решение.

$$a_3 - a_2 = d,$$

$$a_2 - a_1 = d.$$

Вычитая почленно, получим

$$a_1 - 2a_2 + a_3 = 0.$$

Далее,

$$a_2 - 2a_3 + a_4 = 0.$$

Вычитая почленно, получим

$$a_1 - 3a_2 + 3a_3 - a_4 = 0.$$

Далее,

$$a_2 - 3a_3 + 3a_4 - a_5 = 0.$$

Вычитая почленно, получим

$$a_1 - 4a_2 + 6a_3 - 4a_4 + a_5 = 0.$$

Остается применить метод полной индукции.

21. Найти все рациональные значения x, при которых $\sqrt{x^2+x+1}$ есть рациональное число.

Решение. Пусть x и $\sqrt{x^2+x+1}$ — рациональные числа. Тогда

$$\sqrt{x^2+x+1} - x = r \qquad (1)$$

число рациональное. Следствием соотношения (1) являются следующие:

$$\sqrt{x^2+x+1} = x + r,$$

$$x^2 + x + 1 = x^2 + 2rx + r^2,$$

$$x(1-2r) = r^2 - 1.$$

Равенство $r = \frac{1}{2}$ невозможно, так как тогда

$$\sqrt{x^2+x+1} = x + \frac{1}{2},$$

$$x^2 + x + 1 = x^2 + x + \frac{1}{4},$$

$$1 = \frac{1}{4},$$

значит, $r \neq \frac{1}{2}$ и потому

$$x = \frac{r^2-1}{1-2r}.$$

Обратно (это обязательно! — так как пока доказано, что если x и $\sqrt{x^2+x+1}$ рациональны, то $x = \frac{r^2-1}{1-2r}$, где r — *некоторое* рациональное число, а нужно еще доказать, что если $x = \frac{r^2-1}{1-2r}$, где

r — *любое* рациональное число, не равное $\frac{1}{2}$, то $\sqrt{x^2+x+1}$—число рациональное): пусть

$$x=\frac{r^2-1}{1-2r},$$

где r — любое рациональное число, не равное $\frac{1}{2}$; тогда

$$\sqrt{x^2+x+1}=\sqrt{\frac{(r^2-1)^2}{(1-2r)^2}+\frac{r^2-1}{1-2r}+1}=$$

$$=\frac{\sqrt{r^4-2r^3+3r^2-2r+1}}{|1-2r|}=\frac{|r^2-r+1|}{|1-2r|}=\frac{r^2-r+1}{|1-2r|},$$

так как $r^2-r+1>0$ при любом рациональном числе r.

22. Вычислить

$$\sqrt[17]{0{,}9999999873}.$$

с недостатком с семью верными знаками.

Ответ. 0,9999999, так как

$$0{,}9999999873<\sqrt[17]{0{,}9999999873}<1.$$

23. Доказать, что при всех x выполняется неравенство

$$\cos(\sin x)>\sin(\cos x).$$

Решение.

$$\cos(\sin x)-\sin(\cos x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\sin x\right)-\sin(\cos x)=$$

$$=2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\sin x+\cos x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\cos x-\sin x}{2}\right).$$

Далее,

$$\frac{\pi}{4}-\frac{\cos x+\sin x}{2}=\frac{\pi}{4}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right),$$

и так как

$$-1\leqslant\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\leqslant 1,$$

то

$$\frac{\pi}{4}-\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant\frac{\pi}{4}-\frac{\cos x+\sin x}{2}\leqslant\frac{\pi}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Так как

$$\frac{\pi}{4}-\frac{\sqrt{2}}{2}\geqslant\frac{3,14}{4}-\frac{1,42}{2}>0,78-0,71=0,07,$$

$$\frac{\pi}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}<\frac{3,15}{4}+\frac{1,42}{2}<1,5,$$

то

$$0,07<\frac{\pi}{4}-\frac{\cos x+\sin x}{2}<1,5.$$

Оба угла 0,07 и 1,5 радиан находятся в интервале $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, значит,

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\cos x+\sin x}{2}\right)>0.$$

Аналогично доказывается, что в тех же пределах находится и число

$$\frac{\pi}{4}+\frac{\cos x-\sin x}{2},$$

значит, и

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\cos x-\sin x}{2}\right)>0.$$

Поэтому

$$\cos(\sin x)-\sin(\cos x)>0,$$

т. е.

$$\cos(\sin x)>\sin(\cos x).$$

24. Выразить $\sin\frac{x}{2}$ через $\sin x$.

Решение. $\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}=1,$

$$2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=\sin x.$$

Отсюда

$$\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2=1+\sin x,$$

$$\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2=1-\sin x.$$

Отсюда

$$\left|\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right|=\sqrt{1+\sin x},$$

$$\left|\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right|=\sqrt{1-\sin x}.$$

Функция $\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}$ меняет знак при переходе $\frac{x}{2}$ через значения $-\frac{\pi}{4}+k\pi$, а функция $\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}$ меняет знак при переходе $\frac{x}{2}$ через значения $\frac{\pi}{4}+k\pi$. Поэтому при исследовании знака функций $\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}$ и $\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}$ естественно рассмотреть следующие сегменты изменения x:

$$\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi\right],\quad\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right],$$

$$\left[\frac{3\pi}{2}+2k\pi,\frac{5\pi}{2}+2k\pi\right],\quad\left[\frac{5\pi}{2}+2k\pi,\frac{7\pi}{2}+2k\pi\right].$$

1) Пусть $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi$; тогда

$$\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\geqslant 0,$$

$$\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\leqslant 0,$$

значит,

$$\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}=\sqrt{1+\sin x},$$

$$-\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}=\sqrt{1-\sin x},$$

поэтому

$$\sin\frac{x}{2}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}\right).$$

2) Пусть $\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{2}+2k\pi$; тогда

$$\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\geqslant 0,$$

$$\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\geqslant 0,$$

следовательно,

$$\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}=\sqrt{1+\sin x},$$

$$\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}=\sqrt{1-\sin x},$$

и потому

$$\sin\frac{x}{2}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}\right).$$

3) Пусть $\frac{3\pi}{2}+2k\pi\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{2}+2k\pi$; тогда

$$\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\leqslant 0,$$

$$\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\geqslant 0,$$

и потому

$$\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}=-\sqrt{1+\sin x},$$

$$\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}=\sqrt{1-\sin x},$$

значит,

$$\sin\frac{x}{2}=\frac{1}{2}\left(-\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}\right).$$

4) Пусть, наконец,

$$\frac{5\pi}{2}+2k\pi\leqslant x\leqslant\frac{7\pi}{2}+2k\pi;$$

тогда

$$\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\leqslant 0,$$

$$\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\leqslant 0,$$

поэтому

$$\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}=-\sqrt{1+\sin x},$$

$$\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}=-\sqrt{1-\sin x},$$

значит,

$$\sin\frac{x}{2}=-\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}\right).$$

25. Вычислить без таблиц:

1) $\operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{tg} 40^\circ \operatorname{tg} 80^\circ$;

2) $\operatorname{tg} 10^\circ \operatorname{tg} 50^\circ \operatorname{tg} 70^\circ$;

3) $\operatorname{tg} 5^\circ \operatorname{tg} 65^\circ \operatorname{tg} 75^\circ$.

Решение. Каждый пример можно решить, опираясь на формулы:

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)],$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)],$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)].$$

Мы дадим другое решение, предварительно выведя одно тождество:

$$\operatorname{tg} 3x = \frac{\sin 3x}{\cos 3x} = \frac{3\sin x - 4\sin^3 x}{4\cos^3 x - 3\cos x} =$$

$$= \operatorname{tg} x \frac{3-4\sin^2 x}{4\cos^2 x - 3} = \operatorname{tg} x \frac{3-4\sin^2 x}{1-4\sin^2 x} = \operatorname{tg} x \frac{\frac{3}{4}-\sin^2 x}{\frac{1}{4}-\sin^2 x} =$$

$$= \operatorname{tg} x \frac{\sin^2\frac{\pi}{3}-\sin^2 x}{\sin^2\frac{\pi}{6}-\sin^2 x} = \operatorname{tg} x \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)}$$

(известно, что $\sin^2\alpha - \sin^2\beta = \sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$, этот вопрос задавался самостоятельно).

Итак,

$$\operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg} x \frac{\sin(60^\circ+x)\sin(60^\circ-x)}{\cos(60^\circ+x)\cos(60^\circ-x)} = \operatorname{tg} x \operatorname{tg}(x+60^\circ)\operatorname{tg}(60^\circ-x).$$

Полагая в этом тождестве $x=20^\circ$, докажем, что первое из данных выражений равно $\sqrt{3}$. Полагая $x=10^\circ$, докажем, что второе из данных выражений равно $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Полагая, что $x=5^\circ$, получим, что третье из данных выражений равно

$$\operatorname{tg} 15^\circ = \frac{1-\cos 30^\circ}{\sin 30^\circ} = 2-\sqrt{3}.$$

26. Вычислить без таблиц

$$x = \cos\frac{\pi}{19}+\cos\frac{3\pi}{19}+\cos\frac{5\pi}{19}+\cos\frac{7\pi}{19}+\cos\frac{9\pi}{19}+$$

$$+\cos\frac{11\pi}{19}+\cos\frac{13\pi}{19}+\cos\frac{15\pi}{19}+\cos\frac{17\pi}{19}.$$

Указание. Умножить обе части на $\sin\frac{\pi}{19}$ и применить формулу $\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$ (9 раз к правой части).

Ответ: $x=\frac{1}{2}$. Другой способ: просуммировать геометрическую прогрессию:

$$\cos\frac{\pi}{19}+i\sin\frac{\pi}{19}+\cos\frac{3\pi}{19}+i\sin\frac{3\pi}{19}+\ldots+\cos\frac{17\pi}{19}+i\sin\frac{17\pi}{19};$$

в результате получится комплексное число; x — действительная часть этого числа.

27. Как должны быть расположены стороны прямого угла относительно плоскости для того, чтобы в проекции угла на плоскость получились бы углы 1) острый, 2) тупой, 3) прямой.

Вершина данного прямого угла не лежит на данной плоскости.

Решение. 2) Докажем, что если стороны данного прямого угла (или их продолжения) пересекают плоскость, то в проекции получится тупой угол. Предположим, например, что данную плоскость пересекают стороны угла. Обозначим через A и B точки пересечения. Тогда сфера с диаметром AB пройдет через вершину O данного прямого угла, и, значит, точка O на данную плоскость будет проектироваться в точку O', лежащую *внутри* большого круга сферы, по которому ее пересекает данная плоскость. Отсюда следует, что $\angle AO'B$ тупой. Аналогично доказывается, что $\angle AO'B$ тупой в случае, если данную плоскость пересекают продолжения сторон данного прямого угла.

Теперь сразу легко установить, что если данную плоскость пересекает одна из сторон данного прямого угла и продолжение другой, то в проекции получится острый угол (так как угол, смежный с данным, спроектируется в тупой).

Затем надо доказать, что если по крайней мере одна из сторон данного прямого угла параллельна данной плоскости, а другая к ней не перпендикулярна, то в проекции получится прямой угол. Необходимость всех этих признаков доказывается сразу методом от противного.

28. На плоскости найти геометрическое место точек, равноудаленных от двух пересекающихся прямых.

Решение. 1°. Пусть M — точка заданного геометрического места точек, не совпадающая с точкой O пересечения данных прямых l и m. Обозначим через P и Q проекции этой точки M соответственно на прямые l и m. Тогда длины отрезков MP и MQ равны между собой и, значит, прямоугольные треугольники OMP и OMQ равны между собой, так как у них равны катеты (MP и MQ) и они имеют общую гипотенузу.

Отсюда следует, что $\angle MOP=\angle MOQ$ и точка M лежит на одной из биссектрис углов, образованных данными прямыми l и m.

Замечание. Часто поступающие ограничивались только что приведенным рассуждением. Однако из доказанного не следует даже и то, что заданное геометрическое место имеет хотя бы одну точку! В самом деле, ведь доказано только то, что если точка M принадлежит заданному геометрическому месту, то она лежит на одной из биссектрис углов, образованных данными прямыми.

2°. Докажем, что и обратно: если M — любая точка любой из биссектрис углов, образованных прямыми l и m, то она принадлежит заданному геометрическому месту точек, т. е. ее расстояния до данных прямых l и m равны между собой.

Сначала предположим, что точка M не совпадает с точкой O (и лежит, конечно, на одной из биссектрис углов, образованных данными прямыми). Пусть P и Q — проекции точки M соответственно на прямые l и m. Тогда прямоугольные треугольники OMP и OMQ равны между собой, так как они имеют общую гипотенузу OM и $\angle MOP = \angle MOQ$.

Отсюда следует, что $MP = MQ$, т. е. точка M принадлежит заданному геометрическому месту точек.

Если точка M совпадает с точкой O, то ее расстояния до данных прямых также равны между собой.

Вот теперь можно утверждать, что заданное геометрическое место точек состоит из всех точек обеих биссектрис углов между двумя данными прямыми.

Аналогичные вопросы задавались для геометрического места точек, равноудаленных от двух точек, и т. д.

29. На плоскости фиксированы две различные точки A и B. Фиксирована прямая l. Найти на прямой l точку M, для которой сумма $AM^2 + BM^2$ имеет наименьшую величину.

Решение. Пусть M — произвольная точка. Обозначим середину отрезка AB через O, а через C — точку, симметричную точке M относительно точки O. Имеем

$$2 \cdot AM^2 + 2 \cdot BM^2 = 4 \cdot OM^2 + AB^2,$$

откуда

$$AM^2 + BM^2 = 2 \cdot OM^2 + \frac{AB^2}{2}.$$

Отсюда следует, что сумма $AM^2 + BM^2$ имеет наименьшее значение, если наименьшее значение имеет OM^2 или OM. Значит, M — это проекция точки O (середины отрезка AB) на данную прямую l.

30. В пространстве фиксированы две различные точки A и B. Фиксировано число k (положительное, отрицательное или нуль). Найти геометрическое место точек M, для каждой из которых

$$AM^2 - BM^2 = k.$$

Решение. Пусть M точка заданного геометрического места точек, т. е.

$$AM^2 - BM^2 = k.$$

Проведем через точку M плоскость П, перпендикулярную прямой AB. Точку пересечения плоскости П с прямой AB обозначим через P. Тогда очевидно, что

$$AP^2 - BP^2 = AM^2 - BM^2 = k,$$

значит, точка P так же, как и точка M, принадлежит заданному геометрическому месту точек.

Заданному геометрическому месту точек принадлежит вся плоскость П, так как если N — любая точка этой плоскости, то

$$AN^2 - BN^2 = AP^2 - BP^2 = k.$$

Докажем теперь, что на прямой AB существует и притом только одна точка P, такая, что

$$AP^2 - BP^2 = k. \qquad (1)$$

Пусть $k>0$ (случаи $k=0$ и $k<0$ предлагается исследовать читателю самостоятельно). Тогда AP должно быть больше BP и, значит, точка P (если она существует) должна лежать на луче OB, где O — середина отрезка AB. Для того чтобы для точки, лежащей на луче OB, было выполнено соотношение (1), необходимо и достаточно, чтобы было выполнено соотношение

$$(AP - BP)(AP + BP) = k,$$

или

$$AB \cdot 2OP = k,$$

или

$$OP = \frac{k}{2AB}.$$

Таким образом, имеется и притом только одна точка P, лежащая на луче OB, для которой выполняется равенство (1): эта точка P отстоит от точки O на расстоянии $\frac{k}{2AB}$. Из доказанного следует, что заданное геометрическое место точек есть плоскость П, перпендикулярная прямой AB и проходящая через точку P, так как проекция любой точки M, лежащей на плоскости П, на прямую AB совпадает с точкой P и

$$MA^2 - MB^2 = PA^2 - PB^2 = k.$$

31. В пространстве заданы четыре точки A, B, C, D. Найти геометрическое место точек M, для каждой из которых

$$AM^2 + BM^2 = CM^2 + DM^2.$$

Решение.

$$AM^2 + BM^2 = 2 \cdot O_1M^2 + \frac{AB^2}{2},$$

$$CM^2 + DM^2 = 2 \cdot O_2M^2 + \frac{CD^2}{2},$$

где O_1 — середина отрезка AB, а O_2 — середина отрезка CD. Равенство (1) будет выполнено тогда и только тогда, когда

$$2 \cdot O_1M^2 + \frac{AB^2}{2} = 2 \cdot O_2M^2 + \frac{CD^2}{2},$$

или

$$O_1M^2 - O_2M^2 = \frac{CD^2 - AB^2}{4}.$$

Отсюда следует, что заданное геометрическое место точек — это плоскость, перпендикулярная к прямой O_1O_2, проходящей через середины отрезков AB и CD (см. вопрос № 30) и проходящая через точку P прямой O_1O_2, положение которой относительно точек O_1 и O_2 определено так, как указано в предыдущем вопросе.

32. Доказать, что для того чтобы треугольник был тупоугольный, необходимо и достаточно, чтобы его ортоцентр (точка пересечения высот) лежал вне описанной окружности.

33. Стороны треугольника связаны соотношением

$$a^2 + b^2 + c^2 = 9R^2.$$

Доказать, что он равносторонний.

34. Доказать, что если A, B, C — углы треугольника, то

1) $8 \sin\frac{A}{2} \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2} \leqslant 1$;

2) $\cos\frac{A}{2} \cos\frac{B}{2} \cos\frac{C}{2} \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{8}$;

3) $\sin^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{C}{2} \geqslant \frac{3}{4}$.

При каком условии имеет место знак равенства?

35. Две равные прямые круговые конические поверхности имеют общую вершину, но не совпадают. Сколько общих образующих могут иметь эти поверхности?

Ответ. От одной до четырех.

36. Где находится центр тяжести треугольника, сделанного из однородной проволоки?

Ответ. В центре окружности, вписанной в треугольник, вершины которого — середины сторон данного.

37. Постройте треугольник по двум сторонам a и b ($a>0$, $b>0$) и углу A ($0<A<\pi$), противолежащему стороне a.

Р е ш е н и е. Строим угол A. На одной из его сторон откладываем отрезок $AC=b$. Строим окружность с центром C и радиусом a.

С л у ч а й I. A — острый угол. Тогда расстояние от точки C до второй стороны угла A равно $b\sin A$. Поэтому:

1° если $a<b\sin A$, то решений нет;

2° если $a=b\sin A$, то решение одно; соответствующий треугольник ABC прямоугольный, причем $\angle ABC=\frac{\pi}{2}$;

3° если $b\sin A<a<b$, то решений два: ACB_1 и ACB_2; один из этих треугольников тупоугольный, другой — остроугольный (почему?);

4°, 5° если $a\geqslant b$, то решение одно.

С л у ч а й II. Пусть $A=\frac{\pi}{2}$. Повторяя предыдущее построение, заключаем, что:

1° если $a\leqslant b$, то решений нет;

2° если $a>b$, то решение одно.

С л у ч а й III. $\frac{\pi}{2}<A<\pi$ — угол A тупой.

Повторяя предыдущие рассуждения, заключаем, что:

1° если $a\leqslant b$, то решений нет;

2° если $a>b$, то всегда имеется одно решение.

З а м е ч а н и е. Если $a>0$, $b>0$, $0<A<\pi$ и $a>b$, то задача всегда имеет и притом только одно решение.

38. Доказать, что окружность, проходящая через середины сторон треугольника, касается окружности, вписанной в этот треугольник.

39. В треугольнике из трех проекций вершин на противолежащие им стороны хотя бы одна лежит на соответствующей стороне (а не на ее продолжении). Обладает ли аналогичным свойством любой тетраэдр?

О т в е т. Нет. Построить пример такого тетраэдра, для которого проекции всех его вершин в плоскости противолежащих им граней все лежат вне этих граней.

40. Доказать, что если высоты тетраэдра $ABCD$ пересекаются в одной точке, то $AB\perp CD$, $AC\perp BD$ и $AD\perp BC$.

Обратно, если $AB\perp CD$, $AC\perp BD$ и $AD\perp BC$, то высоты тетраэдра $ABCD$ пересекаются в одной точке; доказать, что при этом вместо трех условий $AB\perp CD$, $AC\perp BD$ и $AD\perp BC$ достаточно потребовать выполнения только двух (любых).

41. Внутри треугольника ABC взяты три окружности, каждая из которых касается двух сторон треугольника и окружности, вписанной в этот треугольник. Зная радиусы r_1, r_2 и r_3 этих окруж-

ностей, вычислить радиус r окружности, вписанной в треугольник ABC.

Ответ. $r = \sqrt{r_1 r_2} + \sqrt{r_2 r_3} + \sqrt{r_3 r_1}$.

42. Даны два равных отрезка AB и $A'B'$. Доказать, что поворотом плоскости вокруг некоторой точки можно совместить один отрезок с другим. Сколько существует таких поворотов? Найти их центры и углы поворота.

Решение. Существуют, вообще говоря, два поворота, каждый из которых отрезок AB переводит в отрезок $A'B'$. Центр O_1 одного из них есть точка пересечения медиатрис отрезков AA' и BB' (точки A и A' предполагаются различными, точки B и B' также предполагаются различными. Кроме того, предполагается, что медиатрисы отрезков AA' и BB' пересекаются). При повороте на угол AO_1A' точка A перейдет в точку A', а точка B — в точку B'.

Центр O_2 другого поворота находится в точке пересечения медиатрис отрезков BA' и $B'A$ (точки B и A' предполагаются различными, точки B' и A предполагаются также различными. Кроме того, предполагается, что медиатрисы отрезков BA' и $B'A$ пересекаются). При повороте вокруг точки O_2 на угол $\angle AO_2B'$ точка A перейдет в точку B', а точка B в точку A'. Рассмотрение частных случаев предоставляется читателю.

43. Доказать, что если вокруг сферы описан пространственный четырехугольник $ABCD$ (стороны AB, BC, CD, DA четырехугольника касаются сферы), то точки касания лежат в одной плоскости.

44. В треугольнике ABC длины сторон a, b, c и площадь S связаны соотношением

$$S = a^2 - (b - c)^2.$$

Найти угол A.

Решение.

$$\frac{1}{2} bc \sin A = b^2 + c^2 - 2bc \cos A - b^2 + 2bc - c^2,$$

$$1 - \cos A = \frac{1}{4} \sin A,$$

$$\frac{1 - \cos A}{\sin A} = \frac{1}{4},$$

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{1}{4},$$

$$A = 2 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{4}.$$

45. В треугольнике ABC обозначим через m длину медианы, выходящей из вершины A, а через a — длину стороны BC. При

каком соотношении между m и a угол A будет острый? Прямой? Тупой?

Ответ. $m > \frac{a}{2}$, A — острый угол, $m = \frac{a}{2}$, A — прямой, $m < \frac{a}{2}$, A — тупой.

§ 8. МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

ВАРИАНТЫ ПИСЬМЕННЫХ ЭКЗАМЕНОВ

(дневное отделение)

Вариант 1

1. Расстояние между двумя городами A и B пассажирский поезд проходит на 4 *час* быстрее товарного. Если бы каждый поезд шел то время, которое тратит другой поезд на путь от A до B, то пассажирский поезд прошел бы на 280 *км* больше, чем товарный. Если бы скорость каждого поезда была увеличена на 10 *км/час*, то пассажирский поезд прошел расстояние AB на 2 *час* 24 *мин* быстрее товарного. Найти расстояние между городами A и B.

2. Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$ с вершиной S. Через точки A, B и середину ребра SC проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды?

3. Решить неравенство

$$\log_x [\log_2 (4^x - 6)] \leqslant 1.$$

4. Найти все пары чисел x, y, которые удовлетворяют уравнению

$$\cos x + \cos y - \cos (x + y) = \frac{3}{2}.$$

Вариант 2

5. Из города A в город B через равные промежутки времени и с равной скоростью выезжает 21 автобус, каждый из которых проходит путь AB за 2 *час* 40 *мин*. При этом первый автобус прибывает в город B в тот момент, когда из города A выезжает 21-й автобус. Прибыв в город B, каждый автобус мгновенно поворачивается и двигается к городу A.

Из города A одновременно с 21-м автобусом выезжает в город B легковая машина, которая через t минут обгоняет 20-й автобус. Найти t и время, за которое легковая машина преодолевает

расстояние AB, если, встретив 1-й автобус, она встречает 2-й автобус через $t-9$ *мин.*

Примечание. Автобусы занумерованы в том порядке, в каком они выезжают из города A.

6. Дана правильная треугольная призма $ABCA'B'C'$ с боковыми ребрами AA', BB' и CC'. На продолжении ребра BA взята точка M так, что $MA=AB$ ($MB=2AB$). Через точки M, B' и середину ребра AC проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость делит объем призмы?

7. Решить неравенство

$$\log_2(\sqrt{x+3}-x-1)\leqslant 0.$$

8. Найти все пары чисел x, y, которые удовлетворяют уравнению

$$\left(\sin^2 x+\frac{1}{\sin^2 x}\right)^2+\left(\cos^2 x+\frac{1}{\cos^2 x}\right)^2=12+\frac{1}{2}\sin y.$$

Вариант 3

9. Города A и B расположены на берегу реки, причем город B расположен ниже по течению. В 9 *час* утра из A в B отправляется плот, плывущий относительно берегов со скоростью течения реки. В этот же момент из B в A отправляется лодка, которая встречается с плотом через 5 *час*. Доплыв до города A, лодка мгновенно повернула обратно и приплыла в город B одновременно с плотом. Успели ли лодка и плот прибыть в город B к 9 *час* вечера того же дня?

10. Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$ с вершиной S. На продолжении ребра CB взята точка M так, что $MB=\frac{1}{2}BC$ ($MC=\frac{3}{2}BC$). Через точку M и середины ребер AB и SC проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды?

11. Решить неравенство

$$\log_{x^2}\frac{4x-5}{|x-2|}\geqslant\frac{1}{2}.$$

12. Найти все решения уравнения

$$\sin^2 x+\frac{1}{4}\sin^2 3x=\sin x\cdot\sin^2 3x.$$

Вариант 4

13. Два автобуса выезжают одновременно навстречу друг другу из пунктов A и B и встречаются в 12 *час* дня. Если скорость первого автобуса увеличить в два раза, а скорость второго оста-

вить прежней, то встреча произойдет на 56 *мин* раньше. Если же увеличить в два раза скорость второго автобуса, оставив прежней скорость первого, то встреча произойдет на 65 *мин* раньше. Определить время встречи, если увеличены вдвое скорости обоих автобусов.

14. Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$ с вершиной S. На продолжении ребра CD взята точка M так, что $DM=2CD$ ($CM=3CD$). Через точки M, B и середину ребра SC проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды?

15. Решить неравенство

$$4^x \leqslant 3 \cdot 2^{\sqrt{x}+x} + 4^{1+\sqrt{x}}.$$

16. Найти все пары чисел a, b, для которых всякая пара чисел

$$x, y \left(x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi,\ y \neq \frac{\pi}{2} + m\pi\right),$$

где

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots;\ m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

удовлетворяющая уравнению $x+y=a$, удовлетворяет также уравнению

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = b.$$

Вариант 5

17. Школьник затратил некоторую сумму денег на покупку портфеля, авторучки и книги. Если бы портфель стоил в 5 раз дешевле, авторучка — в 2 раза дешевле, а книга — в 2,5 раза дешевле, то та же покупка стоила бы 8 руб. Если бы по сравнению с первоначальной стоимостью портфель стоил в 2 раза дешевле, авторучка — в 4 раза дешевле, а книга — в 3 раза дешевле, то за ту же покупку школьник уплатил бы 12 руб. Сколько стоит покупка и что дороже: портфель или авторучка?

18. Дана правильная треугольная призма $ABCA'B'C'$ с боковыми ребрами AA', BB' и CC'. На продолжении ребра $A'B'$ взята точка M так, что $B'M=\frac{1}{2}A'B'$ ($A'M=\frac{3}{2}A'B'$). Через точку M и середины ребер $A'C'$ и $B'B$ проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость делит объем призмы?

19. Решить неравенство

$$\log_3 \frac{|x^2-4x|+3}{x^2+|x-5|} \geqslant 0.$$

20. Сколько решений на отрезке $0 \leqslant x \leqslant \pi$ имеет уравнение

$$\sin x + 2\sin 2x = 3 + \sin 3x.$$

Вариант 6

21. Города A и B расположены на берегу реки, причем город A расположен ниже по течению. Из этих городов одновременно выходят навстречу друг другу две лодки, которые встречаются посредине между городами A и B. Продолжив свой путь после встречи в прежних направлениях и достигнув соответственно городов B и A, лодки мгновенно поворачивают обратно и встречаются вновь на расстоянии 20 *км* от места первой встречи. Если бы те же лодки, выйдя одновременно из городов A и B, поплыли обе против течения, то лодка, вышедшая из A, догнала бы лодку, вышедшую из B, в 150 *км* от B. Найти расстояние между городами A и B.

22. Дан куб $ABCDA'B'C'D'$ с боковыми ребрами AA', BB', CC' и DD'. На продолжении ребер AB, AA', AD отложены соответственно отрезки BP, $A'Q$, DR длиной 1,5 AB ($AP=AQ=AR=2{,}5\,AB$). Через точки P, Q и R проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость делит объем куба?

23. Решить неравенство

$$\log_x(2x) \leqslant \sqrt{\log_x(2x^3)}.$$

24. Найти все пары чисел x, y, которые удовлетворяют уравнению

$$\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{tg}^4 y + 2\operatorname{ctg}^2 x \operatorname{ctg}^2 y = 3 + \sin^2(x+y).$$

Вариант 7

25. У школьника была некоторая сумма денег монетами достоинством в 15 коп. и 20 коп., причем 20-копеечных монет было больше, чем 15-копеечных. Пятую часть всех денег школьник истратил, отдав 2 монеты за билет в кино. Половину оставшихся у него денег он отдал за обед, оплатив его тремя монетами. Сколько монет каждого достоинства было у школьника вначале?

26. В треугольной пирамиде все плоские углы при вершине прямые. Доказать, что вершина пирамиды, точка пересечения медиан основания и центр описанного вокруг пирамиды шара лежат на одной прямой.

27. Решить уравнение

$$|3^x - 2\cdot 3^x|^{\log_4(x+2)-\log_2 x} = 1.$$

28. Найти все такие числа p, при которых уравнение

$$1 + p\sin x = p^2 - \sin^2 x$$

имеет решение.

ВАРИАНТЫ ПИСЬМЕННЫХ ЭКЗАМЕНОВ

(вечернее и заочное отделения)

Вариант 1

1. Велосипедист проехал из пункта A в пункт B по пути, состоящему из подъема и спуска, общей длиной 60 *км* и потратил на подъем и спуск одинаковое время. Дальше он проехал за 4 *час* от пункта B до пункта C по ровной дороге, длина которой на 19 *км* больше, чем длина подъема по пути из A в B. С какой скоростью он ехал на подъеме, если известно, что скорость на спуске больше скорости на подъеме на 6 *км/час*, а скорость по ровной дороге равна среднему арифметическому из скоростей на подъеме и спуске.

2. Решить уравнение

$$\sin y + \cos 3y = 1 - 2\sin^2 y + \sin 2y.$$

3. Основанием четырехугольной пирамиды $OABCE$ является прямоугольник $ABCE$, а высота, опущенная из вершины O на основание, проходит через точку пересечения диагоналей основания. Плоские углы AOB и BOC равны соответственно φ и ψ, а высота пирамиды равна H. Найти объем пирамиды.

4. Решить неравенство

$$\frac{|2x-1|}{x^2-x-2} \leqslant \frac{1}{2}.$$

Вариант 2

5. Имеются два куска ткани разных сортов. Первый кусок стоит 90 руб., а второй — 105 руб. Если бы каждый из кусков был меньше на 10 *м*, то первый кусок стоил бы на 10 руб. дороже второго. Если бы во втором куске ткани было на 5 *м* меньше, чем в обоих кусках вместе, то он стоил бы 210 руб. Сколько метров ткани в каждом куске?

6. Решить уравнение

$$\sin^2 t - \sqrt{2}\cos\left(2t - \frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

7. Основанием четырехугольной пирамиды $OABCE$ является ромб, а высота, опущенная из вершины на основание, проходит через точку пересечения диагоналей основания. Двугранные углы, прилегающие к ребрам OA и OC, равны α, двугранные углы, прилегающие к ребрам OB и OE, равны β, а высота равна l. Определить объем пирамиды.

8. Решить неравенство

$$(\log_{|x+6|} 2)\ \log_2(x^2 - x - 2) \geqslant 1.$$

Вариант 3

9. Машинистка перепечатывала рукопись в течение 4 *час*, после чего к ней присоединилась вторая машинистка, и, проработав вместе $13\frac{1}{2}$ *час*, они закончили перепечатку рукописи. Определить, сколько времени нужно каждой машинистке в отдельности на перепечатку рукописи, если известно, что первой на перепечатку половины рукописи надо на 2 *час* больше, чем второй на перепечатку трети рукописи.

10. Решить уравнение

$$-2+4\cos^2 z=\cos z+\sqrt{3}\sin z.$$

11. У трехгранного угла $OABC$ угол между гранями OAB и OBC прямой, а величина каждого из остальных двугранных углов равна γ. Найти величину плоского угла AOC.

12. Решить неравенство

$$\frac{(1+x)(2+x)}{x^2-|x|-2}\geqslant -3x.$$

Вариант 4

13. Два поезда отправляются одновременно из пунктов A и B навстречу друг другу. Скорость первого поезда на 40 *км/час* больше скорости второго. Они встречаются в пункте C, отстоящем на 60 *км* от середины пути AB. Если бы первый поезд вышел на 1 *час* 15 *мин* позже второго, то они встретились бы в середине пути AB. Определить скорости поездов.

14. Решить уравнение

$$\sin 3t\cdot\cos t=\frac{3}{2}\operatorname{tg} t.$$

15. Высота трехгранной пирамиды $OABC$, опущенная на основание ABC, падает в точку P, лежащую внутри треугольника ABC. Найти объем этой пирамиды, если известно, что пирамиды $OABP$, $OBCP$ и $OCAP$ равновелики и что величины отрезков AP, BP, CP и OP равны соответственно a, b, c, d.

16. Решить неравенство

$$\frac{x^2-1}{\sqrt{13-x^2}}\geqslant x-1.$$

Вариант 5

17. Одна чугунная болванка весит 40 *кг*, вторая — 50 *кг*. Погонный метр первой болванки на 1,5 *кг* тяжелее погонного метра второй. Если бы вторая болванка была на 6 *м* длиннее первой, то ее вес равнялся тем же 40 *кг*. Какова длина каждой болванки?

18. Решить уравнение

$$\frac{1+\sin 2\varphi}{1-\sin 2\varphi} = \cos\varphi + \sin\varphi.$$

19. Основанием четырехугольной пирамиды является ромб, а высота, опущенная из ее вершины на основание, проходит через точку пересечения диагоналей ромба. Боковая поверхность данной пирамиды равна c. Через одну из сторон основания пирамиды проведена плоскость, отсекающая от противоположной боковой грани треугольник, площадь которого равна a. Найти боковую поверхность пирамиды, которая отсечена от данной пирамиды проведенной плоскостью.

20. Решить неравенство

$$(x^2 - x - 1)^{x^2-1} < 1.$$

ЗАДАЧИ НА СОСТАВЛЕНИЕ И РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

Среди задач на составление и решение уравнений, предложенных в этом году на механико-математическом факультете, было немало таких, где неизвестных больше, чем уравнений. Однако из полученных систем уравнений можно было определить то, что требовалось в задаче.

Задачи, предлагавшиеся на дневном отделении, разобраны ниже; задачи вечернего отделения предлагаются для самостоятельного решения. В конце книги к ним даны ответы. Приступим к решению задач.

Вариант 1. Пусть v_1 *км/час* — скорость пассажирского поезда, v_2 *км/час* — скорость товарного поезда, s *км* — расстояние между городами A и B.

Тогда расстояние AB пассажирский поезд проходит за $\frac{s}{v_1}$ *час*, а товарный — за $\frac{s}{v_2}$ *час*; из условия, что пассажирский поезд проходит это расстояние на 4 *час* быстрее товарного, получаем

$$\frac{s}{v_1} = \frac{s}{v_2} - 4.$$

Если бы каждый из поездов шел то время, которое тратит другой поезд на путь из A в B, то пассажирский поезд прошел бы $\frac{s}{v_2} v_1$ *км*, а товарный $\frac{s}{v_1} v_2$ *км*. Из условия, что пассажирский поезд прошел бы при этом на 280 *км* больше, чем товарный, имеем

$$\frac{s}{v_2} v_1 = \frac{s}{v_1} v_2 + 280.$$

Если бы скорость каждого поезда увеличить на 10 *км/час*, то пассажирский поезд проходил бы расстояние AB за $\frac{s}{v_1+10}$ *час*, а товарный — за $\frac{s}{v_2+10}$ *час*. Из условия задачи следует, что

$$\frac{s}{v_1+10}=\frac{s}{v_2+10}-2\frac{24}{60}.$$

Перепишем теперь полученную систему уравнений следующим образом:

$$\frac{s}{v_1v_2}(v_1-v_2)=4, \tag{1}$$

$$\frac{s}{v_1v_2}(v_1^2-v_2^2)=280, \tag{2}$$

$$\frac{s}{(v_1+10)(v_2+10)}(v_1-v_2)=\frac{12}{5}. \tag{3}$$

Из этой системы уравнений нам надо найти s. Предварительно найдем v_1 и v_2.

Разделив почленно второе уравнение на первое, получим

$$v_1+v_2=70.$$

Разделив почленно третье уравнение на первое, получим

$$\frac{v_1v_2}{(v_1+10)(v_2+10)}=\frac{3}{5}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} v_1+v_2&=70,\\ v_1v_2&=1200. \end{aligned}$$

Решив эту систему уравнений, найдем, что $v_1=40$, $v_2=30$. Теперь, например, из уравнения (1) находим $s=480$.

Вариант 2. Пусть скорость автобуса v_1 *км/мин*, легковой машины — v_2 *км/мин*. Из условия задачи следует, что расстояние AB равно 160 v_1 *км* и что автобусы выезжают через 8 *мин* один за другим. Легковая машина за t *мин* проходит расстояние v_2t *км*, такое же, какое 20-й автобус преодолевает за $t+8$ *мин*:

$$v_2t=v_1(t+8). \tag{1}$$

В момент встречи легковой машины с 1-м автобусом расстояние между легковой машиной и 2-м автобусом равно $8v_1$ *км*. Через $t-9$ *мин* после этого 2-й автобус пройдет $(t-9)v_2$ *км*, а легковая машина $(t-9)v_1$ и встретит его, следовательно,

$$(t-9)v_1+(t-9)v_2=8v_1. \tag{2}$$

Перепишем систему (1) и (2) так:

$$v_2 t = v_1 (t + 8), \qquad (1')$$

$$v_2 (t - 9) = v_1 (17 - t). \qquad (2')$$

Разделив почленно уравнение (1′) на уравнение (2′), получим

$$\frac{t}{t-9} = \frac{t+8}{17-t},$$

решая которое, найдем $t_1 = 12$ и $t_2 = -3$. Итак, $t = 12$ *мин.*

Выясним теперь, за какое время легковая машина проезжает расстояние AB. Так как расстояние AB равно 160 v_1, а скорость легковой машины v_2, то расстояние AB легковая машина проезжает за $u = 160 \frac{v_1}{v_2}$ *мин.* Зная, что $t = 12$, из уравнения (1) находим

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{t}{t+8} = \frac{12}{60}.$$

Поэтому $u = 160 \cdot \frac{12}{60} = 96$, т. е. легковая машина проезжает расстояние AB за 1 *час* 36 *мин.*

Вариант 3. Пусть скорость лодки в стоячей воде v *км/час*, а скорость реки u *км/час*, и пусть расстояние AB равно s *км*. За 5 *час* лодка проплыла расстояние $5(v-u)$ *км*, а плот $5u$ *км*, и так как через 5 *час* они встретились, то сумма этих двух расстояний есть расстояние AB:

$$s = 5u + 5(v - u).$$

На путь из B в A лодка затратила $\frac{s}{v-u}$ *час*, а на путь из A в B $\frac{s}{v+u}$ *час*; на путь из A в B плот затратил $\frac{s}{u}$ *час*. Так как по условию плот и лодка прибыли в B одновременно, то

$$\frac{s}{u} = \frac{s}{v-u} + \frac{s}{v+u}.$$

В задаче требуется узнать, успели ли лодка и плот прибыть в город B к 9 *час* вечера (того же дня). Другими словами, требуется выяснить, будет ли время, затраченное плотом на путь из A в B, т. е. $\frac{s}{u}$, не больше, чем 12 *час* (так как плот отправился в путь в 9 *час* утра).

Итак, из системы уравнений

$$s = 5u + 5(v - u), \qquad (1)$$

$$\frac{s}{u} = \frac{s}{v-u} + \frac{s}{v+u} \qquad (2)$$

требуется выяснить, будет ли отношение $\frac{s}{u}$ меньше или равно 12, или нет.

Найдем v из уравнения (1), $v=\frac{s}{5}$, и подставим $\frac{s}{5}$ вместо v в уравнение (2); получим

$$\frac{s}{u}=\frac{s}{\frac{s}{5}-u}+\frac{s}{\frac{s}{5}+u},$$

или

$$t=\frac{t}{\frac{t}{5}-1}+\frac{t}{\frac{t}{5}+1},$$

где $t=\frac{s}{u}$.

Это уравнение после упрощений приводится к виду

$$t^2-10t-25=0.$$

Корни этого уравнения действительны и разных знаков. Положительный корень $t=5+\sqrt{50}$. Таким образом, время, затраченное плотом на путь из A в B, равно $5+\sqrt{50}$ *час*.

Так как $5+\sqrt{50}=5+5\sqrt{2}>5+5\cdot 1{,}41=12{,}05$, то время, затраченное плотом на путь из A в B, больше 12 *час*. Значит, прибыть в город B к 9 *час* вечера (того же дня) лодка и плот не успеют.

Вариант 4. Пусть скорость первого автобуса v_1 *км/мин*, а второго v_2 *км/мин*, и пусть расстояние от пункта A до пункта B равно s *км*.

Пусть t *мин* есть время, затраченное автобусами в первый раз на путь до встречи. В первый раз до встречи первый автобус проехал $v_1 t$ *км*, второй $v_2 t$ *км*, а в сумме они проехали s *км*:

$$s=v_1t+v_2t. \qquad (1)$$

Во второй раз скорость первого автобуса была $2v_1$ *км/мин*, а второго прежняя, на путь до встречи они затратили $t-56$ *мин*:

$$s=2v_1(t-56)+v_2(t-56). \qquad (2)$$

Наконец, если бы скорость первого автобуса была прежней, а второго $2v_2$ *км/мин*, то время, затраченное ими на путь до встречи, равно t—65 *мин*:

$$s=v_1(t-65)+2v_2(t-65). \qquad (3)$$

Пусть время до встречи в случае, если увеличены вдвое скорости обоих автобусов, равно x *мин*; тогда

$$s = 2xv_1 + 2xv_2. \tag{4}$$

Итак, мы получили систему четырех уравнений с пятью неизвестными. Из этой системы нужно найти лишь неизвестные t и x. Из уравнений (1) и (4) имеем

$$t = \frac{s}{v_1 + v_2}, \quad x = \frac{s}{2(v_1 + v_2)},$$

следовательно,

$$t = 2x.$$

Перепишем уравнения (1)—(3) следующим образом:

$$s = (v_1 + v_2)t, \tag{1'}$$

$$s = (2v_1 + v_2)(t - 56), \tag{2'}$$

$$s = (v_1 + 2v_2)(t - 65). \tag{3'}$$

Исключая отсюда t, получим систему двух уравнений:

$$\frac{s}{2v_1 + v_2} = \frac{s}{v_1 + v_2} - 56,$$

$$\frac{s}{v_1 + 2v_2} = \frac{s}{v_1 + v_2} - 65.$$

Перепишем эту систему так:

$$\frac{sv_1}{(2v_1 + v_2)(v_1 + v_2)} = 56, \tag{4'}$$

$$\frac{sv_2}{(v_1 + 2v_2)(v_1 + v_2)} = 65. \tag{5}$$

Разделив почленно первое из этих уравнений на второе, получим

$$\frac{v_1(v_1 + 2v_2)}{v_2(2v_1 + v_2)} = \frac{56}{65},$$

или

$$56\left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2 - 18\frac{v_2}{v_1} - 65 = 0.$$

Это уравнение имеет действительные корни разных знаков. Его положительный корень

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{5}{4}.$$

Подставляя значение $v_2 = \frac{5}{4} v_1$, например, в уравнение (4), получим

$$\frac{sv_1}{\left(2v_1 + \frac{5}{4} v_1\right)\left(v_1 + \frac{5}{4} v_1\right)} = 56,$$

откуда

$$s = \frac{819}{2} v_1.$$

Теперь находим

$$x = \frac{s}{2(v_1 + v_2)} = \frac{819v_1}{2 \cdot 2\left(v_1 + \frac{5}{4} v_1\right)} = 91.$$

Итак, $x = 1$ *час* 31 *мин*, значит, $t = 3$ *час* 2 *мин*.

В задаче требуется узнать, когда встретились бы автобусы, если их скорость увеличить вдвое? Для этого надо от 12 *час* отнять $(t - x)$ *час*. Таким образом, автобусы встретились бы в 10 *час* 29 *мин*.

Вариант 5. Пусть портфель стоит x руб., авторучка y руб., а книга z руб.

Первое уравнение составляется из условия, что покупка стоит 8 руб.:

$$\frac{x}{5} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2,5} = 8. \tag{1}$$

Аналогично составляется второе уравнение:

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{3} = 12. \tag{2}$$

Упрощая уравнения (1) и (2), будем иметь

$$\begin{aligned} 2x + 5y + 4z &= 80, \\ 6x + 3y + 4z &= 144. \end{aligned} \tag{3}$$

Складывая почленно, получим

$$x + y + z = 28.$$

Таким образом, вся покупка стоила 28 рублей. Вычитая почленно из второго уравнения системы (3) первое, получим

$$2x - y = 32. \tag{4}$$

Предположим, что $x \leqslant y$; тогда уравнение (4) можно переписать так: $x = 32 + y - x$.

В этом случае $x \geqslant 32$ (так как, по предположению, $y - x \geqslant 0$). Но если $x \geqslant 32$, то такое x не может удовлетворять уравнению (2) (так как $\frac{x}{2} \geqslant 16$, а числа y и z положительны), значит, этот случай невозможен.

Таким образом, остается лишь случай $x > y$, т. е. портфель дороже авторучки.

Выяснить, что дороже, портфель или авторучка, можно и так: из системы (3) находим, что $y = 8 - \frac{2}{3}z$, а $x = 20 - \frac{1}{3}z$; так как $x = 8 - \frac{2}{3}z + 12 + \frac{1}{3}z = y + 12 + \frac{1}{3}z$ и $z > 0$, то ясно, что $x > y$.

Вариант 6. Пусть скорость реки v *км/час*, скорость первой лодки в стоячей воде v_1 *км/час*, скорость второй лодки в стоячей воде v_2 *км/час*, и пусть расстояние между городами A и B равно s *км*. На путь до первой встречи первая лодка затрачивает $\frac{s}{2(v_1 - v)}$ *час*, а вторая $\frac{s}{2(v_2 + v)}$ *час*, откуда получаем первое уравнение

$$\frac{s}{2(v_2 + v)} = \frac{s}{2(v_1 - v)}. \tag{1}$$

На путь до второй встречи первая лодка затрачивает $\frac{s}{v_1 - v} + \frac{\frac{s}{2} + 20}{v_1 + v}$ *час*, считая от момента ее выезда из A, а вторая $\frac{s}{v_2 + v} + \frac{\frac{s}{2} - 20}{v_2 - v}$ *час*; отсюда получаем второе уравнение:

$$\frac{s}{v_1 - v} + \frac{\frac{s}{2} + 20}{v_1 + v} = \frac{s}{v_2 + v} + \frac{\frac{s}{2} - 20}{v_2 - v}. \tag{2}$$

Если бы обе лодки поплыли одновременно из пунктов A и B против течения, то на путь до встречи первая лодка затратила бы $\frac{s + 150}{v_1 - v}$ *час*, а вторая $\frac{150}{v_2 - v}$ *час*; таким образом, получаем третье уравнение:

$$\frac{s + 150}{v_1 - v} = \frac{150}{v_2 - v}. \tag{3}$$

Перепишем систему уравнений (1), (2) и (3) так:

$$v_2 = v_1 - 2v, \tag{1'}$$

$$\frac{s+40}{v_1+v}=\frac{s-40}{v_2-v}, \qquad (2')$$

$$s=150\frac{v_1-v_2}{v_2-v}. \qquad (3')$$

Отсюда

$$\frac{s+40}{v_1+v}=\frac{s-40}{v_1-3v}, \qquad (4)$$

$$s=150\frac{2v}{v_1-3v}. \qquad (5)$$

Из уравнения (4) находим

$$s=20\frac{v_1-v}{v}. \qquad (6)$$

Из уравнений (5) и (6) имеем

$$\frac{20(v_1-v)}{v}=150\frac{2v}{v_1-3v},$$

или

$$\left(\frac{v_1}{v}\right)^2-4\frac{v_1}{v}-12=0.$$

Это уравнение имеет действительные корни разных знаков; положительный корень

$$\frac{v_1}{v}=6.$$

Но тогда

$$s=\frac{20(v_1-v)}{v}=\frac{20\cdot 5v}{v}=100.$$

Итак, расстояние между городами A и B равно 100 *км*.

Замечание. В предыдущих задачах число уравнений было меньше, чем число неизвестных, но нам удавалось найти нужные неизвестные из этих систем.

Большие трудности у поступающих вызывают задачи, которые очень похожи на задачи на составление и решение уравнений, но которые надо решать простым рассуждением, не составляя уравнений. Такова, например, следующая задача.

Вариант 7. Пусть у школьника было n монет достоинством в 15 коп. и k монет достоинством в 20 коп., причем из условия задачи $n<k$. За билет в кино школьник заплатил не менее 30 коп.

(15+15). За обед школьник заплатил в два раза дороже, чем за билет в кино, т. е. не менее 60 коп., но известно, что за обед школьник отдал 3 монеты, т. е. заплатил не более 60 коп. Отсюда ясно, что за обед школьник заплатил 60 коп. (20+20+20), а за билет в кино 30 коп. (15+15).

После того как школьник оплатил билет в кино и обед, у него осталось 60 коп. Эти 60 коп. могут составить 4 монеты достоинством в 15 коп., или 3 монеты достоинством в 20 коп.

Если бы у него осталось 4 монеты достоинством в 15 коп. каждая, то вначале у него было бы 6 монет достоинством в 15 коп. и 3 монеты достоинством в 20 коп., т. е. $n>k$, что противоречит условию задачи. Значит, у школьника осталось 3 монеты достоинством в 20 коп.

Таким образом, у школьника вначале было 2 монеты достоинством в 15 коп. и 6 монет достоинством в 20 коп.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

Почти во всех геометрических задачах, предлагавшихся на дневном отделении механико-математического факультета, проводилась некоторая плоскость сечения данного многогранника (куба, пирамиды, призмы) и требовалось выяснить, в каком отношении эта плоскость делит объем многогранника.

При решении подобных задач обычно возникает две трудности:

1. Как достаточно просто построить сечение.

2. Как вычислить объемы частей, на которые делит многогранник плоскость сечения.

Однако в предлагаемых задачах трудности эти существенно уменьшаются, если при решении задач делать дополнительные построения вне рассматриваемого многогранника.

Как будет ясно из дальнейшего, эти дополнительные построения позволяют сравнительно просто построить сечение, т. е. найти все точки пересечения с ребрами многогранника, и они же позволяют вычислить объем одной из частей, на которые плоскость сечения делит многогранник.

Ниже мы приведем решения всех таких задач и (для сравнения) для некоторых из них дадим решения, не связанные с выходом за пределы рассматриваемого многогранника.

Заметим еще, что решения всех этих задач существенно не меняются, а ответы остаются теми же, если предположить, что рассматриваемые многогранники произвольные, а не правильные.

Однако мы приведем решения лишь для правильных многогранников, как и требуется в условиях задач.

И последнее, выход за пределы рассматриваемого тела оказывается также полезным и при решении задач на доказательство, как например, в одной из задач, предлагавшейся на дневном отделении и разобранной ниже. Задачи, предлагавшиеся на вечернем отделении, оставлены для самостоятельного разбора.

Вариант 1

Прежде всего отметим, что так как прямая AB (рис. 61) параллельна прямой DC, то она параллельна и плоскости боковой грани DSC. Тогда любая плоскость, проходящая через прямую AB, пересекает плоскость боковой грани DSC по прямой, параллельной прямой AB.

Следовательно, плоскость, проходящая через точки A, B и середину (точку F) ребра SC, пересекает боковую грань DSC по прямой EF, являющейся средней линией треугольника DSC.

Теперь найдем объем многогранника $ABCDEF$. Сделаем дополнительное построение: продолжим прямую EF и отложим на ней отрезок $FK=EF$, затем точку K соединим прямыми с точками B и C.

Рассмотрим четырехугольник $DCKE$. Это параллелограмм, так как в нем противоположные стороны DC и KE равны и параллельны. А раз четырехугольник $DCKE$ есть параллелограмм, то в нем противоположные стороны DE и CK равны и параллельны.

Аналогично показывается, что четырехугольник $ABKE$ есть параллелограмм и в нем противоположные стороны AE и BK равны и параллельны.

Так как в основании нашей пирамиды лежит квадрат, то DA и CB также равны и параллельны.

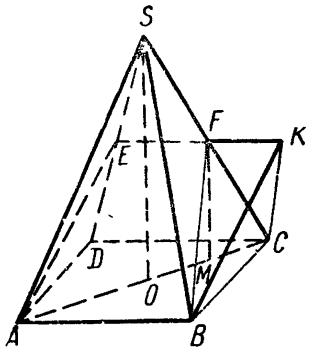

Рис. 61

Итак, мы получили, что в треугольниках ADE и BCK соответствующие стороны равны и параллельны, а это означает, что эти треугольники равны, а их плоскости параллельны. Так как, кроме того, $DC=EK=AB$ и прямые DC, EK и AB параллельны, то многогранник $BCKADE$ есть треугольная призма с основаниями ADE и BCK.

Эту призму можно также рассматривать как половину параллелепипеда, у которого в основании лежит квадрат $ABCD$, а одной из боковых граней является параллелограмм $DCKE$. Поэтому объем призмы $CBKDAE$ равен половине объема этого параллелепипеда, т. е. половине произведения площади квадрата $ABCD$ на высоту параллелепипеда, например, на высоту FM, опущенную из точки F на плоскость $ABCD$.

Из подобия треугольников OSC и MFC вытекает, что высота нашего параллелепипеда равна половине высоты пирамиды.

Пусть V — объем пирамиды, V_1 — объем призмы $CBKDAE$, S — площадь квадрата $ABCD$, H — высота пирамиды, тогда

$$V=\frac{SH}{3},\quad V_1=\frac{S\cdot\frac{H}{2}}{2}=\frac{SH}{4},$$ откуда получаем, что $V_1=\frac{3}{4}V$, т.е.

объем призмы $CBKDAE$ составляет $^3/_4$ объема пирамиды $SABCD$.

Теперь вспомним, что нам надо найти объем не призмы $CBKDAE$, а многогранника $ABCDEF$, который есть разность призмы $CBKDAE$ и пирамиды $BCKF$. Поэтому для нахождения объема V_3 многогранника $ABCDEF$ надо из объема V_1 призмы $CBKDAE$ вычесть объем V_2 пирамиды $BCKF$.

Найдем объем V_2 пирамиды $BCKF$. Пусть S_1 — площадь треугольника CKF, а h — длина высоты, опущенной из вершины B на плоскость треугольника CKF. Тогда

$$V_2 = \frac{S_1 \cdot h}{3}. \qquad (*)$$

Но легко видеть, что призма $CKBDEA$ есть половина и такого параллелепипеда: основание — параллелограмм $DCKE$, а квадрат $ABCD$ есть одна из боковых граней. Тогда в этом параллелепипеде высота есть h, а площадь основания $DCKE$ — четыре площади треугольника FKC, поэтому объем призмы $CKBDEA$ можно записать и так:

$$V_1 = \frac{4S_1 \cdot h}{2}.$$

Отсюда, учитывая равенство (*), получаем

$$V_2 = \frac{V_1}{6}.$$

Теперь объем V_3 многогранника $ABCDEF$ найти легко:

$$V_3 = V_1 - V_2 = \frac{5}{6} V_1.$$

Но так как $V_1 = \frac{3}{4} V$, то окончательно получаем, что

$$V_3 = \frac{5}{8} V,$$

т. е. объем многогранника $ABCDEF$ составляет $^5/_8$ объема пирамиды $SABCD$; но тогда объем многогранника $SABFE$ составляет $^3/_8$ объема пирамиды $SABCD$.

Следовательно, плоскость, проходящая через точки A, B и середину F ребра SC правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$, делит объем пирамиды в отношении 3 : 5.

Эту задачу можно решить и без выхода за пределы рассматриваемой пирамиды. Как уже показано выше, наша плоскость пересечет плоскость боковой грани DSC по средней линии треугольника DSC. Для нахождения объема многогранника $ABCDEF$ проведем плоскость ADF. Тогда многогранник $ABCDEF$ разобьется на две пирамиды $FABCD$ и $ADEF$. Найдем теперь объемы этих двух пирамид.

Так как у пирамиды $FABCD$ высота равна половине высоты пирамиды $SABCD$, а основание то же самое, то объем V_1 пирами-

ды $FABCD$ равен половине объема V пирамиды $SABCD$, т. е. $V_1 = {}^1/_2 V$.

Для нахождения объема пирамиды $ADEF$ проведем плоскость SAC. Тогда объем V_2 пирамиды $ADCS$ равен половине объема V пирамиды $SABCD$, т. е. $V_2 = {}^1/_2 V$.

В пирамиде $ADCS$ точку A можно принять за вершину пирамиды, а треугольник DCS — за основание. В пирамиде $ADEF$ точка A также может быть принята за вершину, а треугольник DEF — за основание. Тогда у пирамид $ADEF$ и $ADCS$ равные высоты.

Кроме того, очевидно, что площадь треугольника DEF равна площади треугольника EFS, а последняя равна ${}^1/_4$ площади треугольника DCS. Значит, объем V_3 пирамиды $ADEF$ равен ${}^1/_4$ объема V_2 пирамиды $ADCS$, т. е. $V_3 = \frac{1}{4} V_2 = \frac{1}{8} V$. Теперь объем V_4 многогранника $ABCDEF$ легко найти:

$$V_4 = V_1 + V_3 = \frac{1}{2} V + \frac{1}{8} V = \frac{5}{8} V.$$

Итак, объем многогранника $ABCDEF$ равен ${}^5/_8$ объема данной пирамиды $SABCD$, поэтому секущая плоскость делит объем данной пирамиды в отношении 3 : 5.

Ответ: 3 : 5.

Вариант 2

Пусть длина бокового ребра призмы $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 62) равна H, длина ребра основания равна a, а площадь основания $S_{\Delta ABC}$, тогда объем V призмы равен: $V = H \cdot S_{\Delta ABC}$.

Пусть точка E — середина ребра AC. Точки E и M лежат в плоскости грани ABC, поэтому, соединив точки E и M прямой, получим, что она пересекает ребро BC в точке D.

В треугольнике ABC проведем среднюю линию EN. Получим подобные треугольники BMD и NED. Из подобия этих треугольников получаем, что

$$\frac{BD}{ND} = \frac{BM}{NE}.$$

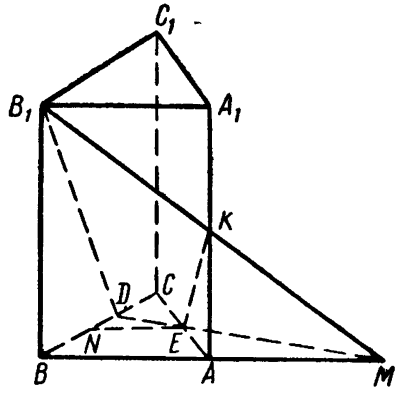

Рис. 62

Так как $NE = BN = \frac{a}{2}$, $BM = 2a$, $ND = BD - BN = BD - \frac{a}{2}$, то из этого соотношения находим $BD = \frac{2}{3} a$, т. е. точка D делит ребро BC в отношении 2 : 1. Соединив точки B_1 и M прямой, получим,

что она пересекает ребро AA_1 в точке K, причем ясно, что точка K будет серединой ребра AA_1.

Итак, наша плоскость разбила призму на 2 многогранника, отношение объемов которых надо найти. Найдем сначала объем V_1 многогранника $ABDEB_1K$, ограниченного треугольниками B_1BD и AKE, четырехугольниками $ABDE$, ABB_1K и B_1KED. Объем этого многогранника равен разности объемов двух треугольных пирамид B_1BDM и $KAME$.

Найдем объем V_2 пирамиды B_1BDM:

$$V_2 = \frac{1}{3} BB_1 \cdot S_{\triangle BDM}.$$

Площадь треугольника BDM равна половине произведения основания BM на высоту, опущенную из точки D на основание.

Так как точка D делит ребро BC в отношении $2:1$, то высота, опущенная из точки D на основание, равна $^2/_3$ высоты h треугольника ABC. Поэтому

$$S_{\triangle BDM} = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot \frac{2}{3} h = \frac{4}{3} \cdot \frac{ah}{2} = \frac{4}{3} S_{\triangle ABC},$$

но тогда

$$V_2 = \frac{1}{3} H \cdot \frac{4}{3} S_{\triangle ABC} = \frac{4}{9} V.$$

Так как $S_{\triangle AEM} = \frac{1}{2} AM \cdot \frac{1}{2} h = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC}$ и $AK = \frac{1}{2} H$, то объем V_3 пирамиды $KAEM$ равен

$$V_3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} H \cdot \frac{1}{2} S_{\triangle ABC} = \frac{1}{12} V.$$

Тогда $V_1 = V_2 - V_3 = \frac{13}{36} V$, т. е. плоскость делит объем призмы в отношении $13:23$.

Найти объем V_1 многогранника $ABDEB_1K$ без выхода за пределы призмы $ABCA_1B_1C_1$ можно, но это вычисление не будет короче. Убедимся в этом.

Проведя плоскость через точки A, B_1 и E, получим, что наш многогранник разбился на 2 пирамиды: четырехугольную пирамиду B_1ABDE (B_1 — вершина, четырехугольник $ABDE$ — основание) и треугольную пирамиду $EAKB_1$ (E — вершина, треугольник AKB_1 — основание).

Найдем объемы этих пирамид. У четырехугольной пирамиды B_1ABDE высота есть ребро B_1B, значит, высота равна H.

Теперь найдем площадь четырехугольника $ABDE$. Она равна площади треугольника ABC без площади треугольника EDC. Найдем площадь треугольника EDC. Так как точка D делит отре-

зок BC в отношении 2 : 1, то высота, проведенная из точки D на основание EC, равна $^1/_3$ высоты треугольника ABC.

Так как основание $EC = {}^1/_2 AC$, то площадь треугольника EDC равна $^1/_6$ площади треугольника ABC. Значит, площадь четырехугольника $ABDE$ равна $^5/_6$ площади треугольника ABC. Поэтому объем V_2 четырехугольной пирамиды B_1ABDE равен

$$V_2 = \frac{1}{3} H \cdot \frac{5}{6} S_{\triangle ABC} = \frac{5}{18} V,$$

где $V = H \cdot S_{\triangle ABC}$ есть объем призмы $ABCA_1B_1C_1$. Нашу призму $ABCA_1B_1C_1$ можно рассматривать как половину параллелепипеда, у которого основание — грань ABB_1A_1, а боковая грань — четырехугольник ACC_1A_1. Но тогда объем V призмы $ABCA_1B_1C_1$ можно посчитать и так: $V = {}^1/_2 h \cdot S_{ABB_1A_1}$, где h — высота, опущенная из точки C на грань ABB_1A_1, причем ясно, что h — высота треугольника ACB.

Теперь легко найти объем V_3 треугольной пирамиды $EAKB_1$. Для этого надо найти площадь треугольника AKB_1 и высоту, опущенную из точки E на грань ABB_1A_1. Очевидно, что так как точка E — середина ребра AC, то и высота, опущенная из точки E на грань ABB_1A_1, равна половине высоты, опущенной из точки C на грань ABB_1A_1, т. е. равна $h/2$.

Так как K есть середина отрезка AA_1 (рис. 62), то площадь треугольника AKB_1 равна половине площади треугольника AA_1B_1, т. е. равна $^1/_4 S_{ABB_1A_1}$.

Значит,

$$V_3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{1}{4} S_{ABB_1A_1} = \frac{1}{12} V.$$

Теперь объем V_1 многогранника $ABDEB_1K$ равен

$$V_1 = V_2 + V_3 = \frac{5}{18} V + \frac{1}{12} V = \frac{13}{36} V.$$

Следовательно, объем многогранника $A_1B_1C_1DCEK$ равен $\frac{23}{36} V$, и плоскость делит объем призмы $ABCA_1B_1C_1$ в отношении 13 : 23.

Ответ: 13 : 23.

Вариант 3

Пусть точка K есть середина ребра AB (рис. 63). Плоскость сечения пересекает плоскость $ABCD$ по прямой KM, которая пересекает ребро AD в точке F и продолжение ребра CD в точке E. Легко показать, что точка F есть середина ребра AD и точка E отстоит от точки D на $^1/_2 DC$, т. е.

$$ED = \frac{1}{2} DC \left(EC = \frac{3}{2} DC \right).$$

Пусть точка N — середина ребра CS. Точки N и M лежат в плоскости грани SBC, поэтому прямая MN пересекает ребро BS в некоторой точке L.

Выясним теперь, в каком отношении точка L делит ребро BS. Для этого проведем в треугольнике CSB среднюю линию NQ. Тогда получим, что треугольники NQL и LBM равны, так как у них $BM=NQ=\frac{1}{2}CB$, $\angle LBM=\angle NQL$ и $\angle BML=\angle QNL$, как накрест лежащие углы при параллельных прямых NQ и CM. Но из равенства этих треугольников вытекает, что $BL=QL$, откуда получаем: точка L делит ребро SB в отношении 3 : 1.

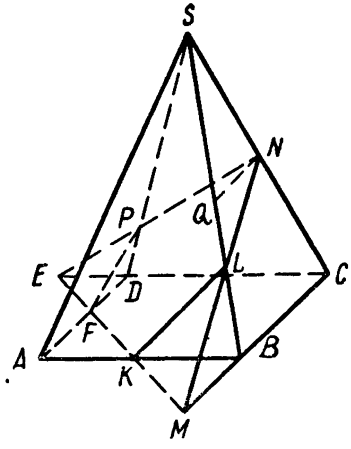

Рис. 63

Так как точки E и N лежат в плоскости грани SDC, то соединив эти точки, получим, что прямая EN пересечет ребро SD в некоторой точке P. Как легко показать, точка P делит ребро SD также в отношении 3 : 1.

Итак, мы построили сечение. Оказалось, что плоскость сечения пересекает пирамиду по пятиугольнику $LKFPN$. Эта плоскость делит пирамиду $SABCD$ на два многогранника, причем таких, что вычислить их объемы сразу не представляется возможным. Для того чтобы вычислить объем хотя бы одного из этих многогранников, нужно сделать дополнительные построения и рассмотреть несколько пирамид.

Однако если внимательно посмотреть на чертеж (см. рис. 63), то можно убедиться, что объем многогранника $CDFKBLNP$, ограниченного треугольниками DFP и KLB, четырехугольниками $CNLB$ и $CNPD$, пятиугольниками $PFKLM$ и $DFKBC$, равен объему треугольной пирамиды $NECM$ без объема двух треугольных пирамид $LKBM$ и $PEDF$. Вычислим теперь объемы этих пирамид.

Пусть высота нашей пирамиды $SABCD$ равна H, а ребро основания равно a, тогда объем пирамиды $SABCD$ равен: $V=\frac{a^2H}{3}$. Так как точка N есть середина ребра CS, то легко показать, что перпендикуляр, опущенный из этой точки на плоскость $ABCD$, равен половине перпендикуляра, опущенного из точки S на плоскость $ABCD$, т. е. этот перпендикуляр равен $H/2$. Столь же легко показать, что перпендикуляры, опущенные из точек L и P на плоскость $ABCD$, равны $\frac{H}{4}$.

Площадь треугольника ECM равна $\frac{9}{8}a^2$. Площадь каждого из треугольников DEF и BMK равна $\frac{a^2}{8}$. Теперь объем пирамиды $NECM$

равен $\frac{1}{3}\cdot\frac{H}{2}\cdot\frac{9}{8}a^2=\frac{9}{16}V$, а объем каждой из пирамид $PEFD$ и $LKBM$ равен $\frac{1}{3}\cdot\frac{H}{4}\cdot\frac{a^2}{8}=\frac{V}{32}$. Поэтому объем V_1 нашего многогранника равен

$$V_1=\frac{9}{16}V-2\cdot\frac{1}{32}V=\frac{V}{2}.$$

Значит, наша плоскость делит объем пирамиды в отношении 1 : 1.

В этой задаче вычисление объема многогранника $CDFKBLNP$ без выхода за пределы пирамиды и длиннее и, главное, менее геометрически нагляднее, чем разобранное выше решение. Однако приведем его.

Проведя плоскости через точки N, K, B и N, D, F, получим, что многогранник $CDFKBLNP$ разбился на три пирамиды: пятиугольную пирамиду $NDFKBC$ (N — вершина, пятиугольник $KBCDF$ — основание), треугольную пирамиду $NKBL$ (N — вершина, треугольник KBL — основание) и треугольную пирамиду $NPDF$ (N — вершина, треугольник PDF — основание). Вычислим объемы этих пирамид.

Так как точка N делит ребро CS пополам, то длина высоты, опущенной из точки N на плоскость $ABCD$, равна половине высоты, опущенной из точки S на ту же плоскость, т. е. равна $H/2$.

Площадь пятиугольника $KBCDF$ равна площади квадрата $ABCD$ без площади треугольника AKF:

$$S_{KBCDF}=a^2-\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{4}=\frac{7}{8}a^2.$$

Поэтому объем V_1 пирамиды $NKBCDF$ равен

$$V_1=\frac{1}{3}\cdot\frac{H}{2}\cdot\frac{7}{8}a^2=\frac{7}{16}V,$$

где V — объем пирамиды $SABCD$.

Заметим, что объем V пирамиды $SABCD$ равен двум объемам пирамиды $SABC$. Будем считать, что у пирамиды $SABC$ точка C — вершина, а треугольник ABS — основание. Пусть высота, опущенная из точки C на грань ABS, равна H_1, а площадь треугольника ABS равна $S_{\triangle ABS}$, тогда

$$\frac{V}{2}=\frac{1}{3}H_1\cdot S_{\triangle ABS},\ \text{т. е. } V=\frac{2}{3}H_1S_{\triangle ABS}.$$

Так как точка N — середина ребра CS, то перпендикуляр, опущенный из этой точки на плоскость ABS, равен $\frac{1}{2}H_1$.

Так как $KB = \frac{1}{2} AB$, а $BL = \frac{1}{4} BS$, то

$$S_{\triangle KBL} = \frac{1}{2} KB \cdot BL \cdot \sin \angle KBL =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} AB \cdot \frac{1}{4} BS \cdot \sin \angle KBL = \frac{1}{8} S_{\triangle ABS}.$$

Поэтому объем V_2 пирамиды $NKBL$ равен

$$V_2 = \frac{1}{3} \frac{H_1}{2} \cdot \frac{1}{8} S_{\triangle ABS} = \frac{1}{32} \cdot \left(\frac{2}{3} H \cdot S_{\triangle ABS} \right) = \frac{1}{32} V.$$

Совершенно аналогичные рассуждения позволяют найти объем V_3 треугольной пирамиды $NPDF$:

$$V_3 = \frac{1}{32} V.$$

Теперь объем V_4 многогранника $KBCDFPNL$ уже легко считается:

$$V_4 = V_1 + V_2 + V_3 = \frac{7}{16} V + \frac{1}{32} V + \frac{1}{32} V = \frac{1}{2} V,$$

т. е. плоскость сечения делит объем пирамиды пополам.

Ответ: 1 : 1.

Вариант 4

Точки M и B лежат в плоскости грани $ABCD$ (рис. 64). Соединив их прямой, получим, что она пересекает ребро AD в точке K. Рассматривая подобные треугольники MBC и MKD, получаем, что $\frac{KD}{BC} = \frac{MD}{MC}$, откуда $KD = \frac{2}{3} BC$, т. е. точка K делит отрезок AD в отношении 1 : 2. Пусть точка E — середина ребра SC. Точки M и E лежат в плоскости грани SDC, поэтому, соединив эти точки прямой, получим, что она пересечет ребро SD в точке P. Пусть точка O — середина ребра DC; соединив точки E и O прямой, получим, что OE есть средняя линия треугольника SDC, т. е. $OE = {}^1/_2 DS$.

Рассматривая подобные треугольники MPD и MEO, получаем, что $\frac{DP}{OE} = \frac{MD}{MO}$, откуда $DP = \frac{4}{5} OE = \frac{2}{5} DS$, значит, точка P делит ребро SD в отношении 3 : 2.

Итак, плоскость сечения разделила пирамиду $SABCD$ на два многогранника. Один из них — многогранник $BECKPD$ — ограничен треугольниками BEC и KPD и четырехугольниками $KDCB$, $KBEP$ и $PDCE$. Найдем его объем.

Этот многогранник равен разности двух треугольных пирамид $EMCB$ и $PMDK$. Поэтому найдем их объемы.

Для нахождения объема V_1 пирамиды $EMCB$ надо найти площадь основания — треугольника MBC и длину высоты, опущенной из точки E на основание, — на плоскость $ABCD$. Так как E — сере-

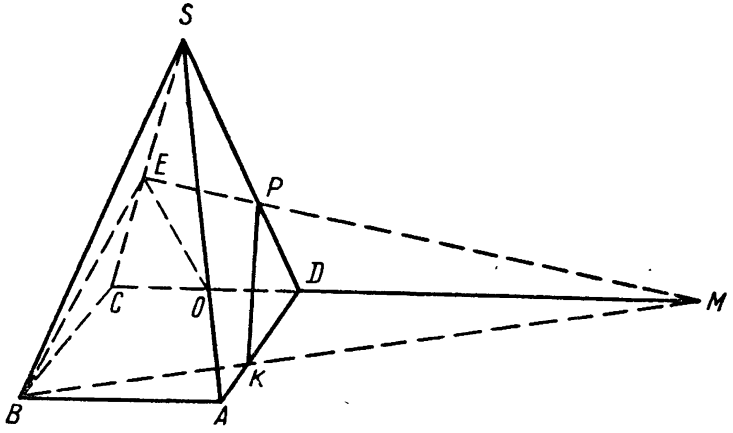

Рис. 64

дина ребра SC, то перпендикуляр, опущенный из этой точки, равен половине перпендикуляра H, опущенного из точки S на плоскость $ABCD$, т. е. равен $H/2$.

Если ребро основания призмы равно a, то площадь прямоугольного треугольника MBC равна

$$S_{\triangle MBC} = \frac{1}{2} BC \cdot MC = \frac{3}{2} a^2.$$

Поэтому

$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{H}{2} \cdot \frac{3}{2} a^2 = \frac{3}{4} V,$$

где $V = \frac{Ha^2}{3}$ есть объем пирамиды $SABCD$.

Теперь найдем объем пирамиды $PMDK$. Так как точка P делит ребро SD в отношении 3 : 2, то перпендикуляр, опущенный из этой точки на основание — на плоскость $ABCD$,—равен $^2/_5$ перпендикуляра, опущенного из точки S на плоскость $ABCD$, т. е. равен $^2/_5 H$.

Найдем площадь треугольника MDK

$$S_{\triangle MDK} = \frac{1}{2} DK \cdot MD = \frac{2}{3} a^2.$$

Теперь объем V_2 пирамиды $PMKD$ легко находится:

$$V_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} H \cdot \frac{2}{3} a^2 = \frac{4}{15} V.$$

Итак, объем V_3 многогранника $BECKPD$ найден:

$$V_3 = V_1 - V_2 = \frac{3}{4} V - \frac{4}{15} V = \frac{29}{60} V.$$

Но тогда объем второго многогранника равен $\frac{31}{60} V$. Поэтому плоскость сечения делит объем пирамиды в отношении 29 : 31.

Объем многогранника $BECKPD$ может быть найден и без выхода за пределы пирамиды $SABCD$. Для этого проведем плоскость EKD. Тогда многогранник разобьется на две пирамиды: четырехугольную $EDCBK$ и треугольную $KDPE$. Найдем их объемы.

Площадь четырехугольника — трапеции $DKBC$ — равна:

$$S_{DKBC} = \frac{DK + BC}{2} \cdot DC = \frac{5}{6} a^2.$$

Высота, опущенная из точки E на плоскость $ABCD$, уже найдена и равна $\frac{H}{2}$. Поэтому объем V_1 пирамиды $EDCBK$ равен

$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{H}{2} \cdot \frac{5}{6} a^2 = \frac{5}{12} V.$$

Пусть в пирамиде $KDPE$ точка K — вершина, а треугольник DPE — основание. Пусть в треугольнике DSC длина стороны DS равна b, а длина высоты, опущенной из точки C на сторону DS, равна h, тогда $S_{\triangle DSC} = \frac{1}{2} hb$.

Так как точка E — середина ребра SC, то перпендикуляр, опущенный из точки E на ребро DS равен половине перпендикуляра, опущенного из точки C на ребро DS, т. е. равен $h/2$.

Так как, кроме того, $DP = \frac{2}{5} DS = \frac{2}{5} b$, то

$$S_{\triangle DPE} = \frac{1}{2} DP \cdot \frac{h}{2} = \frac{1}{5} \frac{bh}{2} = \frac{1}{5} S_{\triangle DSC}.$$

Точка K делит ребро AD в отношении 1 : 2, поэтому перпендикуляр, опущенный из точки K на плоскость SDC, равен $^2/_3$ перпендикуляра H_1, опущенного из точки A на плоскость SDC, т. е. равен $^2/_3 H_1$.

Поэтому объем V_2 пирамиды $KPDE$ равен

$$V_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} H_1 \cdot \frac{1}{5} S_{\triangle DSC} = \frac{1}{15} \left(\frac{2}{3} H_1 \cdot S_{\triangle DSC} \right).$$

Заметим, что объем V пирамиды $SABCD$ равен двум объемам пирамиды $SACD$. Кроме того, пирамиду $SACD$ можно рассматри-

вать и так: точка A — вершина, а треугольник SDC — основание, тогда объем этой пирамиды равен:

$$\frac{V}{2}=\frac{1}{3}H_1\cdot S_{\triangle SDC},\ \text{т. е. } V=\frac{2}{3}H_1\cdot S_{\triangle SDC}.$$

Поэтому $V_2={}^1/_{15}\ V$. Теперь объем V_3 многогранника $BCEKDP$ легко подсчитывается

$$V_3=V_1+V_2=\frac{5}{12}V+\frac{1}{15}V=\frac{29}{60}V.$$

Значит, наша плоскость сечения делит объем пирамиды в отношении 29 : 31.

Ответ: 29 : 31.

Вариант 5

Пусть точка E — середина ребра A_1C_1 (рис. 65). Так как точки E и M лежат в плоскости грани $A_1B_1C_1$, то соединив эти точки прямой, получим, что она пересечет ребро C_1B_1 в точке K. Проведя среднюю линию EQ треугольника $A_1B_1C_1$, получим равные треугольники EQK и KB_1M.

Из равенства этих треугольников вытекает, что $KB_1=QK$, т. е. что $B_1K={}^1/_4\ C_1B_1$. Значит, плоскость сечения пересекает ребро C_1B_1 в точке K, делящей это ребро в отношении 3 : 1.

Пусть далее точка D есть середина ребра BB_1. Так как точки M и D лежат в плоскости грани ABB_1A_1, то, проведя прямую MD, получим, что она пересечет ребро AB в точке N и продолжение ребра A_1A в точке L. Причем легко показать, что точка N есть середина ребра AB, а точка L отстоит от точки A на половину ребра AA_1, т. е. $AL={}^1/_2AA_1$ и $LA_1={}^3/_2AA_1$.

Так как точки L и E лежат в плоскости грани ACC_1A_1, то соединив точки L и E прямой, получим, что она пересекает ребро AC в точке F. Из подобия треугольников LAF и LA_1E вытекает, что

$$AF=\frac{1}{3}A_1E=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}A_1C_1\right)=\frac{1}{6}A_1C_1.$$

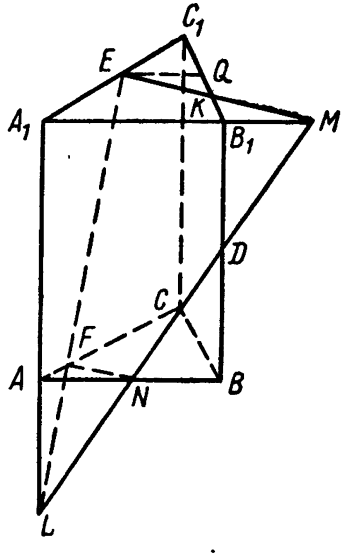

Рис. 65

Значит, точка F делит ребро AC в отношении 1 : 5. Итак, мы нашли все точки пересечения плоскости сечения с ребрами призмы. Сечение построено; оно разбило призму на два многогранника, отношение объемов которых нам надо найти. Найдем объем V_1

многогранника, ограниченного треугольниками AFN и KB_1D, четырехугольниками AA_1EF и A_1EKB_1, пятиугольниками AA_1B_1DN и $NFEKD$.

Заметим, что объем этого многогранника можно получить так: из объема треугольной пирамиды LA_1EM отнять объем двух треугольных пирамид $LAFN$ и DKB_1M.

Найдем теперь объемы всех этих трех пирамид. Пусть боковые ребра призмы $AA_1=BB_1=CC_1=H$, а площадь основания — треугольника ABC — равна S; тогда объем призмы равен $V=H\cdot S$.

Найдем объем V_2 пирамиды LA_1EM. Так как прямая LA_1 перпендикулярна по условию задачи плоскости A_1EM, то LA_1 есть высота пирамиды LA_1EM и $LA_1={}^3/_2\ H$.

Как следует из рис. 65, площадь треугольника A_1EM равна площади трапеции A_1B_1QE, т. е. равна ${}^3/_4\ S_{\triangle A_1B_1C_1}={}^3/_4\ S$.

Поэтому

$$V_2=\frac{1}{3}LA_1\cdot S_{\triangle A_1EM}=\frac{3}{8}V.$$

Далее, так как $AF={}^1/_6\ AC$, то высота треугольника AFN равна ${}^1/_6$ высоты треугольника ACB, откуда, учитывая, что $AN={}^1/_2\ AB$, получаем:

$$S_{\triangle AFN}=\frac{1}{12}S_{\triangle ABC}=\frac{1}{12}S.$$

Так как AL перпендикулярно плоскости AFN и так как $AL=\frac{1}{2}AA_1=\frac{1}{2}H$, то получаем, что объем V_3 пирамиды $LAFN$ равен

$$V_3=\frac{1}{3}AL\cdot S_{\triangle AFN}=\frac{1}{3}\frac{H}{2}\cdot\frac{1}{12}S=\frac{1}{72}V.$$

Наконец, так как точка D есть середина ребра BB_1 и прямая B_1D перпендикулярна плоскости KB_1M, то высота пирамиды DB_1KM равна $B_1D={}^1/_2\ H$. Площадь треугольника B_1MK равна ${}^1/_8\ S_{\triangle A_1B_1C_1}$, т. е. $S_{\triangle B_1MK}={}^1/_8\ S$. Поэтому объем V_4 пирамиды DB_1KM равен

$$V_4=\frac{1}{3}B_1D\cdot S_{\triangle B_1MK}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}H\cdot\frac{1}{8}S=\frac{1}{48}V.$$

Теперь найдем объем V_1 нашего многогранника:

$$V_1=V_2-V_3-V_4=\frac{3}{8}V-\frac{1}{72}V-\frac{1}{48}V=\frac{49}{144}V.$$

Значит, наша плоскость делит объем призмы $ABCA_1B_1C_1$ в отношении 49 : 95.

Для нахождения объема многогранника AA_1EKB_1DNF без выхода за пределы призмы $ABCA_1B_1C_1$ проведем две плоскости: первую через точки D, A_1 и E, вторую через точки D, A и F. Тогда наш многогранник разобьется на три пирамиды: четырехугольную пирамиду DA_1EKB_1 (D — вершина, четырехугольник A_1EKB_1 — основание), четырехугольную пирамиду DAA_1EF (D — вершина, четырехугольник AA_1EF — основание) и треугольную пирамиду $DAFN$ (D — вершина, треугольник AFN — основание). Найдем объемы этих пирамид.

Так как точка D есть середина ребра BB_1 и ребро призмы перпендикулярно плоскостям основания, то высоты пирамид $DAFN$ и DA_1EKB_1 равны $H/2$.

Так как $S_{\triangle AFN} = \frac{1}{12} S$, то объем пирамиды $DAFN$:

$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{H}{2} \cdot \frac{1}{12} S = \frac{1}{72} V.$$

Площадь четырехугольника A_1EKB_1 равна площади треугольника $A_1B_1C_1$ без площади треугольника EC_1K. Так как $EC_1 = {}^1/_2\, A_1C_1$ и $C_1K = {}^3/_4\, C_1B_1$, то площадь треугольника EC_1K:

$$S_{\triangle EC_1K} = \frac{1}{2} C_1E \cdot C_1K \cdot \sin \angle EC_1K = \frac{3}{8} S_{\triangle A_1B_1C_1}.$$

Теперь

$$S_{A_1EKB_1} = S_{\triangle A_1B_1C_1} - S_{\triangle EC_1K} = \frac{5}{8} S,$$

поэтому объем пирамиды DA_1EKB_1:

$$V_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{H}{2} \cdot \frac{5}{8} S = \frac{5}{48} V.$$

Заметим теперь, что объем призмы $ABCA_1B_1C_1$ равен половине объема параллелепипеда, у которого основание — грань ACC_1A_1, а боковая грань — четырехугольник ABB_1A_1, поэтому

$$V = \frac{1}{2} \cdot h \cdot S_{ACC_1A_1},$$

где h — высота, опущенная из точки B на плоскость ACC_1A_1. Высота пирамиды DAA_1EF, опущенная из точки D на плоскость ACC_1A_1, равна h. Теперь найдем площадь четырехугольника AA_1EF. Четырехугольник AA_1EF есть трапеция, поэтому

$$S_{AA_1EF} = \frac{A_1E + AF}{2} \cdot AA_1.$$

И так как $A_1E = \frac{1}{2} A_1C_1$, а $AF = \frac{1}{6} A_1C_1$, то

$$S_{AA_1EF} = \frac{\frac{1}{2} A_1C_1 + \frac{1}{6} A_1C_1}{2} AA_1 = \frac{1}{3} S_{ACC_1A_1}.$$

Теперь объем пирамиды DAA_1EF равен

$$V_3 = \frac{1}{3} AB \cdot S_{AA_1EF} = \frac{2}{9} V,$$

и наконец, объем многогранника AA_1EKB_1DNF

$$V_4 = V_1 + V_2 + V_3 = \frac{1}{72} V + \frac{5}{48} V + \frac{2}{9} V = \frac{49}{144} V.$$

Значит, наша плоскость делит объем призмы $ABCA_1B_1C_1$ в отношении 49 : 95.

Ответ: 49 : 95.

Вариант 6

Прежде всего найдем точки пересечения плоскости сечения с ребрами куба (рис. 66).

В плоскости грани AA_1D_1D лежат точки Q и R. Соединив их прямой, получим, что она пересечет продолжение ребра A_1D_1 в точке E. Сравнивая подобные треугольники EQA_1 и RQA, получаем, что длина отрезка A_1E равна $^3/_2$ AD. В плоскости грани AA_1B_1B лежат точки Q и P. Соединив их прямой, получим, что она пересечет продолжение ребра A_1B_1 в точке F. Причем аналогично предыдущему $A_1F = {}^3/_2\, AB$. Точки P и R лежат в плоскости грани $ABCD$. Соединив их прямой, получим, что она пересечет продолжение ребра DC в точке L. Причем аналогично предыдущему $DL = {}^3/_2\, DC$.

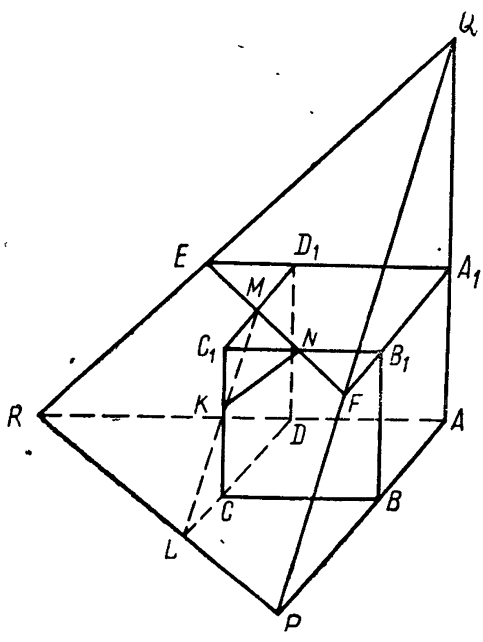

Рис. 66

Точки E и F лежат в плоскости грани $A_1B_1C_1D_1$. Соединив их прямой, получим, что она пересечет ребра C_1D_1 и B_1C_1 в точках M и N. Рассматривая треугольники MD_1E,

FB_1N и C_1MN, приходим к выводу, что точки M и N есть середины ребер C_1D_1 и B_1C_1.

Точки M и L лежат в плоскости грани CDD_1C_1. Соединив их прямой, получим, что она пересечет ребро CC_1 в точке K. Сравнивая треугольники C_1MK и KCL, убеждаемся в том, что точка K есть середина ребра CC_1.

Итак, мы нашли сечение — это треугольник KMN, где точки K, M и N есть середины ребер CC_1, C_1D_1 и B_1C_1.

Наша плоскость сечения отсекла от куба треугольную пирамиду C_1KMN. Так как у этой пирамиды все плоские углы при вершине C_1 прямые, то объем этой пирамиды равен

$$V_1 = \frac{1}{6} C_1M \cdot C_1K \cdot C_1N = \frac{1}{48} V,$$

где V — объем куба. Значит, наша плоскость делит объем куба в отношении 1 : 47.

Ответ: 1 : 47.

Вариант 7

Пусть у пирамиды $ABCD$ (рис. 67) все плоские углы при вершине A прямые $\angle BAC = \angle BAD = \angle CAD = 90°$.

Пусть точка O есть центр описанного около пирамиды шара. Тогда она является точкой пересечения всех плоскостей, проведенных через середины ребер пирамиды перпендикулярно этим ребрам. В частности, отсюда следует, что прямые, соединяющие точку O с серединами ребер AB, AC и AD, перпендикулярны соответствующим ребрам AB, AC и AD.

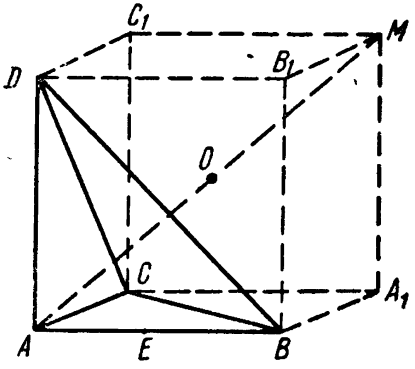

Рис. 67

Соединим точку O с вершиной A. Нам надо доказать, что эта прямая пересекает плоскость треугольника BCD в точке пересечения медиан этого треугольника. Для доказательства этого факта надо сделать дополнительные построения. Как было уже показано выше, очень часто решение той или иной задачи упрощается, если дополнительные построения проводить вне тела, рассматриваемого в задаче. Поступим так же и в этой задаче.

На диагонали AO отложим отрезок $OM = AO$ ($AM = 2AO$). Через точку M проведем плоскость, перпендикулярную ребру AB. Эта плоскость пересечет ребро AB в точке K, причем прямая MK будет перпендикулярна ребру AB. Пусть точка E — середина отрезка AB, тогда, как уже было отмечено выше, прямая OE также перпендикулярна ребру AB. Мы получили, что треугольники AOE и

AMK прямоугольные и имеют один общий угол, поэтому они подобны. Но из подобия следует, что $AK=2AE$, т. е. $AK=AB$. А это означает, что точки K и B совпали.

Итак, плоскость, проходящая через точку M перпендикулярно ребру AB, пересекает ребро AB в точке B. Аналогично показывается, что плоскости, проходящие через точку M перпендикулярно ребрам AC и AD, пересекают эти ребра в точках C и D.

Но тогда при пересечении этих трех плоскостей с плоскостями ABC, ABD и ACD боковых граней нашей пирамиды образуется прямоугольный параллелепипед $ABA_1CDB_1MC_1$ с диагональю AM.

Теперь надо выяснить: в какой точке диагональ AM параллелепипеда пересекает плоскость треугольника BCD?

Диагональ AM лежит в плоскости $ADMA_1$. Эта плоскость пересекает отрезок BC в его середине (диагонали параллелограмма ACA_1B, пересекаясь, делятся пополам). Поэтому плоскость $ADMA_1$ пересекает плоскость BCD по прямой, соединяющей точку D с серединой отрезка BC, т. е. по медиане треугольника BCD. Значит, точка пересечения диагонали AM с плоскостью треугольника BCD лежит на одной медиане этого треугольника.

Аналогично доказывается, что точка пересечения диагонали AM с плоскостью треугольника BCD лежит и на другой медиане этого треугольника. Таким образом, доказано, что точка пересечения диагонали AM с плоскостью треугольника BCD лежит на пересечении медиан этого треугольника.

Значит, доказано, что в нашей пирамиде — вершина, точка пересечения медиан треугольника и центр описанного вокруг пирамиды шара лежат на одной прямой. А это и требовалось доказать в условии задачи.

Решение неравенств

Почти во всех вариантах письменных работ как на дневном, так и на вечернем отделениях механико-математического факультета предлагалось решить неравенства.

Для решения этих неравенств надо хорошо знать свойства логарифмической и показательной функции, отчетливо понимать определение абсолютной величины действительного числа и пр.

Ниже мы разберем решение всех неравенств, предлагавшихся на дневном отделении, оставив читателю неравенства, предлагавшиеся на вечернем отделении, для самостоятельного решения.

Напомним читателю, что областью определения функции $y=f(x)$ называется множество всех тех значений x, каждому из которых поставлено в соответствие число y.

1. Решить неравенство

$$\log_x [\log_2 (4^x - 6)] \leqslant 1.$$

Областью определения функции

$$y = \log_x [\log_2 (4^x - 6)]$$

являются все значения x, являющиеся решением системы неравенств:

$$x > 0, \quad x \neq 1, \quad \log_2 (4^x - 6) > 0, \quad 4^x - 6 > 0,$$

или

$$x > 0, \quad x \neq 1, \quad 4^x - 6 > 1.$$

Но система неравенств

$$0 < x < 1, \quad 4^x > 7$$

несовместна. Значит, областью определения функции y является множество всех чисел x, таких, что

$$x > \log_4 7.$$

Считая $x > \log_4 7$ и замечая, что $\log_4 7 > 1$, заключаем: данное неравенство эквивалентно следующему неравенству:

$$\log_2 (4^x - 6) \leqslant x,$$

или

$$4^x - 6 \leqslant 2^x,$$

Решая же неравенство

$$4^x - 6 \leqslant 2^x,$$

или

$$2^{2x} - 2^x - 6 \leqslant 0,$$

или

$$(2^x + 2)(2^x - 3) \leqslant 0,$$

получим

$$x \leqslant \log_2 3,$$

и так как $\log_4 7 = \log_2 \sqrt{7} < \log_2 3$, то решениями данного неравенства будут все x из промежутка

$$\log_4 7 < x \leqslant \log_2 3.$$

2. Решить неравенство

$$\log_2\left(\sqrt{x+3}-x-1\right)\leqslant 0.$$

Данное неравенство будет справедливо тогда и только тогда, когда будут выполнены неравенства

$$\left.\begin{aligned} x+3&\geqslant 0, \\ \sqrt{x+3}-x-1&>0, \\ \sqrt{x+3}-x-1&\leqslant 1. \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &(1)\\ &(2)\\ &(3) \end{aligned}$$

Неравенство

$$\sqrt{x+3}>x+1$$

выполняется, если $-3\leqslant x<-1$, так как при этих значениях x левая часть — неотрицательна, а правая — отрицательна. Если же считать $x\geqslant -1$, то неравенство

$$\sqrt{x+3}>x+1$$

эквивалентно неравенству

$$x+3>x^2+2x+1,$$

или

$$x^2+x-2<0,$$

откуда

$$-2<x<1,$$

т. е. в рассматриваемом случае решения неравенства (2)

$$-1\leqslant x<1.$$

Итак, все решения неравенства (2):

$$-3\leqslant x<1.$$

Решим неравенство (3):

$$\sqrt{x+3}\leqslant x+2. \qquad (3')$$

Среди значений x, таких, что $x\leqslant -2$, оно решений не имеет. Считая $x>-2$ (и учитывая, что тогда $x+3>0$), заключаем, что неравенство (3′) эквивалентно неравенству

$$x+3\leqslant x^2+4x+4,$$

или

$$x^2+3x+1\geqslant 0,$$

откуда

$$x\geqslant \frac{\sqrt{5}-3}{2}.$$

Все решения исходного неравенства — это все решения системы (1), (2), (3), т. е.

$$\frac{\sqrt{5}-3}{2}\leqslant x<1.$$

3. Решить неравенство

$$\log_{x^2}\frac{4x-5}{|x-2|}\geqslant\frac{1}{2}.$$

Областью определения функции

$$y=\log_{x^2}\frac{4x-5}{|x-2|}$$

является множество всех решений системы неравенств:

$$x^2\neq 0,\quad x^2\neq 1,\quad 4x-5>0,\quad x\neq 2,$$

т. е.

$$x>\frac{5}{4},\quad x\neq 2.$$

Но если $x>\frac{5}{4}$ и $x\neq 2$, то во всяком случае $x^2>1$, и данное неравенство эквивалентно неравенству

$$\frac{4x-5}{|x-2|}\geqslant x,$$

или

$$4x-5\geqslant x|x-2|. \qquad (1)$$

Рассмотрим два случая:

$$\frac{5}{4}<x<2 \quad \text{и} \quad x>2.$$

1°. $\frac{5}{4} < x < 2$. Тогда неравенство (1) эквивалентно следующему:

$$4x - 5 \geqslant -x^2 + 2x,$$

или

$$x^2 + 2x - 5 \geqslant 0,$$

или

$$[x - (-1 - \sqrt{6})]\,[x - (\sqrt{6} - 1)] \geqslant 0,$$

или (так как $x - (-1 - \sqrt{6}) = x + 1 + \sqrt{6} > 0$)

$$x \geqslant \sqrt{6} - 1.$$

Поскольку $\sqrt{6} - 1 > \frac{5}{4}$, то решение исходного неравенства

$$\sqrt{6} - 1 < x < 2.$$

2°. $x > 2$. Тогда неравенство (1) эквивалентно следующему:

$$4x - 5 \geqslant x^2 - 2x,$$

или

$$x^2 - 6x + 5 \leqslant 0,$$

или

$$1 \leqslant x \leqslant 5.$$

Значит, решение исходного неравенства

$$2 < x \leqslant 5.$$

Итак, все решения исходного неравенства:

$$\sqrt{6} - 1 < x < 2, \quad 2 < x \leqslant 5.$$

4. Решить неравенство

$$4^x \leqslant 3 \cdot 2^{\sqrt{x}} \cdot 2^x + 4 \cdot 4^{\sqrt{x}}.$$

Ясно, что решениями этого неравенства могут быть только неотрицательные числа. Разделив обе части неравенства на $4^{\sqrt{x}}$, получим неравенство

$$4^{-\sqrt{x}+x} \leqslant 3 \cdot 2^{x-\sqrt{x}} + 4,$$

равносильное данному, поскольку $4^x > 0$ для всех x.

Полагая $y = 2^{x-\sqrt{x}}$, получаем неравенство

$$y^2 - 3y - 4 \leqslant 0.$$

Всеми решениями этого неравенства относительно y будут все y из сегмента

$$-1 \leqslant y \leqslant 4.$$

Значит, всеми решениями исходного неравенства будут все x, удовлетворяющие неравенствам

$$-1 \leqslant 2^{x-\sqrt{x}} \leqslant 4.$$

Но неравенство $-1 \leqslant 2^{x-\sqrt{x}}$ выполняется для всех $x \geqslant 0$, поэтому решением исходного неравенства будут все $x \geqslant 0$, удовлетворяющие неравенству

$$2^{x-\sqrt{x}} \leqslant 4.$$

Последнее неравенство равносильно следующему:

$$x - \sqrt{x} \leqslant 2,$$

или

$$(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2) \leqslant 0.$$

Так как $x \geqslant 0$, то $\sqrt{x}+1 > 0$, и значит, $\sqrt{x} \leqslant 2$, т. е. $x \leqslant 4$.

Итак, всеми решениями данного неравенства будут все x из сегмента $0 \leqslant x \leqslant 4$.

5. Решить неравенство

$$\log_3 \frac{|x^2-4x|+3}{x^2+|x-5|} \geqslant 0.$$

Совершенно очевидно, что для любого действительного x под знаком логарифма стоит положительное число. На основании свойств логарифмов с основанием, большим единицы, это неравенство равносильно следующему:

$$\frac{|x^2-4x|+3}{x^2+|x-5|} \geqslant 1.$$

Так как $x^2+|x-5|>0$ для всех действительных значений x, то это неравенство эквивалентно такому:

$$|x|\,|x-4|+3\geqslant x^2+|x-5|. \qquad (1)$$

Так как выражения x, $x-4$ и $x-5$, находящиеся под знаком модуля, обращаются в нуль соответственно при $x=0$, $x=4$ и $x=5$, то естественно исследовать неравенство (1) на промежутках

$$x\leqslant 0,\quad 0<x\leqslant 4\quad 4<x\leqslant 5,\quad x>5.$$

1°. $x\leqslant 0$. Тогда неравенство (1) можно переписать так:

$$-x(4-x)+3\geqslant x^2-(x-5).$$

Упростив это неравенство, получим $x\leqslant -\frac{2}{3}$.

Так как все эти x удовлетворяют условию $x\leqslant 0$, то все они являются решениями данного неравенства.

2°. $0<x\leqslant 4$. Неравенство (1) в этом случае эквивалентно такому:

$$x(4-x)+3\geqslant x^2-(x-5),$$

или

$$2x^2-5x+2\leqslant 0.$$

Всеми решениями этого неравенства будут все значения x из сегмента $\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 2$. Так как все эти x удовлетворяют условию $0<x\leqslant 4$, то все они будут решениями исходного неравенства.

3°. $4<x\leqslant 5$. Неравенство (1) перепишется так:

$$x(x-4)+3\leqslant x^2-(x-5),\text{ или } x\leqslant -\frac{2}{3}.$$

Так как все эти x не удовлетворяют условию $4<x\leqslant 5$, то в полуинтервале $4<x\leqslant 5$ нет решений исходного неравенства.

4°. $x>5$. Неравенство (1) примет вид $x(x-4)+3\geqslant x^2+x-5$, или $x\leqslant \frac{8}{5}$.

Так как все эти x не удовлетворяют условию $x>5$, то в промежутке $x>5$ исходное неравенство не имеет решений.

Итак, все решения данного неравенства будут все $x\leqslant -\frac{2}{3}$ и все x из сегмента $\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 2$.

6. Решить неравенство

$$\log_x(2x)\leqslant\sqrt{\log_x(2x^3)}\,.$$

Область D_1 определения функции $\log_x(2x)$ такова:

$$x>0, \quad x\neq 1.$$

Область D_2 определения функции $\sqrt{\log_x(2x^3)}$ находится из системы неравенств

$$\left.\begin{array}{l} x>0, \quad x\neq 1, \\ \log_x(2x^3)\geqslant 0. \end{array}\right\} \tag{1}$$

Если $0<x<1$, то неравенство $\log_x(2x^3)\geqslant 0$ эквивалентно $0<2x^3\leqslant 1$, т. е. в итоге $0<x\leqslant\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. Если же $x>1$, то неравенство $\log_x(2x^3)\geqslant 0$ эквивалентно $2x^3\geqslant 1$, т. е. $x\geqslant\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, что выполняется, если $x>1$.

Итак, множество всех решений системы (1), т. е. область D_2 определения функции $\sqrt{\log_x(2x^3)}$, состоит из двух промежутков:

$$0<x\leqslant\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \quad x>1.$$

Множество всех значений из области D_2 определения функции $\sqrt{\log_x(2x^3)}$ входит в область D_1 ($x>0$, $x\neq 1$) определения функции $\log_x(2x)$. Таким образом, все решения данного неравенства входят в область D_2. Ясно, что все x из D_2, для которых $\log_x(2x)\leqslant 0$, являются решениями исходного неравенства.

Неравенство $\log_x(2x)\leqslant 0$ выполняется для всех x из промежутка $\frac{1}{2}\leqslant x<1$ и только для этих x. Следовательно, данное неравенство выполняется для всех x из этого промежутка, входящих в D_2, т. е. для всех x из промежутка

$$\frac{1}{2}\leqslant x<\frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$$

Теперь предположим, что или $0<x<\frac{1}{2}$, или $x>1$ (это часть области D_2 после удаления из них промежутка $\frac{1}{2}<x\leqslant\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$).

Если или $0<x<\frac{1}{2}$, или $x>1$, то обе части данного неравенства положительны, поэтому после возведения неравенства в квадрат получим неравенство

$$(1+\log_x 2)^2\leqslant 3+\log_x 2,$$

эквивалентное данному (для значений x, таких, что или $0<x<\frac{1}{2}$, или $x>1$).

Перепишем это неравенство так:

$$(\log_x 2 + 2)(\log_x 2 - 1) \leqslant 0. \qquad (1)$$

1°. Пусть $x > 1$. Тогда $\log_x 2 > 0$, значит, неравенство (1) равносильно $\log_x 2 - 1 \leqslant 0$ или $\log_x 2 \leqslant 1$. Отсюда получаем, что решением данного неравенства будут все $x \geqslant 2$.

2°. Пусть $0 < x < \frac{1}{2}$. Тогда $\log_x 2 < 0$ и неравенство (1) эквивалентно $\log_x 2 + 2 \geqslant 0$ или $2 \leqslant x^{-2}$, но это неравенство выполняется при *всех* x из интервала $0 < x < \frac{1}{2}$.

Объединяя все полученные результаты, заключаем, что все решения данного неравенства — это все значения x из промежутков $0 < x \leqslant \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ и $x \geqslant 2$.

Решение нестандартных задач

Четвертые задачи в вариантах, предложенных на механико-математическом факультете, были «нестандартными» в том смысле, что требовали для решения более искусственных методов и более тонких рассуждений, чем обычно. В частности, в решениях очень существенно использовались неравенства, и в особенности два легко доказываемых, но очень важных неравенства

$$a^2 + b^2 \geqslant 2|a||b|, \qquad \text{при любых } a \text{ и } b;$$

$$a + \frac{1}{a} \geqslant 2, \qquad \text{при } a > 0.$$

Кроме того, в решениях постоянно приходилось уделять особое внимание тем случаям, когда имеют место знаки равенства: в первом неравенстве только при $|a| = |b|$, во втором — только при $a = 1$.

Мы подробно разбираем решения всех этих задач и в большинстве случаев приводим несколько решений. Заметим сразу же, что решения этих задач сами по себе несложны. Поэтому мы рекомендуем решить все эти задачи еще до того, как вы прочтете их решения.

1. Сколько решений на отрезке $0 \leqslant x \leqslant \pi$ имеет уравнение

$$\sin x + 2\sin 2x = 3 + \sin 3x.$$

Перепишем данное уравнение в виде

$$\sin 3x - \sin x - 2\sin 2x + 3 = 0$$

и преобразуем левую часть:

$$2\sin x\cos 2x - 4\sin x\cos x + 3 = \sin x(2\cos 2x - 4\cos x) + 3 =$$
$$= \sin x(4\cos^2 x - 4\cos x - 2) + 3 = \sin x[(2\cos x - 1)^2 - 3] + 3.$$

Тогда будем иметь уравнение

$$\sin x(2\cos x - 1)^2 + 3(1 - \sin x) = 0.$$

По условию надо найти решения только на сегменте $0 \leqslant x \leqslant \pi$, а на этом сегменте справедливо неравенство $\sin x \geqslant 0$. Поэтому оба слагаемых в получившемся у нас уравнении неотрицательны, и оно удовлетворяется, таким образом, в том и только в том случае, когда эти слагаемые одновременно равны нулю. Таким образом, данное уравнение эквивалентно системе *двух* уравнений с *одним* неизвестным

$$\sin x(2\cos x - 1)^2 = 0,$$
$$3(1 - \sin x) = 0.$$

Из второго уравнения системы имеем $\sin x = 1$. Но тогда $\cos x = 0$ и $(2\cos x - 1)^2 = 1 \neq 0$. Поэтому ни одно решение второго уравнения не является решением первого, и, следовательно, система, а вместе с ней и исходное уравнение, решений не имеет.

Замечание. В приведенном выше решении чрезвычайно существенно то, что корни разыскивались только на отрезке $0 \leqslant x \leqslant \pi$, где $\sin x \geqslant 0$. Однако это условие дано лишь для облегчения задачи; в действительности и без этого ограничения можно доказать, что и при $\sin x < 0$ уравнение не имеет решений.

В самом деле, если $\sin x < 0$, то

$$\sin x + 2\sin 2x < 0 + 2 = 2,$$

а

$$3 + \sin 3x \geqslant 3 + (-1) = 2.$$

Можно рассуждать и так: преобразуем данное уравнение к виду

$$\sin x = 2(1 - \sin 2x) + 1 + \sin 3x;$$

отсюда следует, что $\sin x \geqslant 0$ — противоречие с предположением $\sin x < 0$.

Таким образом, данное уравнение не имеет корней не только на отрезке $0 \leqslant x \leqslant \pi$, но и вообще не имеет ни одного корня.

Отметим одну особенность этой задачи. В условии требуется найти, сколько решений имеет это уравнение на отрезке $0 \leqslant x \leqslant \pi$, а оказывается, что оно вообще не имеет решений. Можно, конечно, сказать, что уравнение имеет на указанном отрезке 0 корней. Это кажущееся противоречие между условием и ответом ставило некоторых поступающих в тупик.

И в следующем уравнении, внешне совершенно обычном, ничего не удается добиться стандартными приемами.

2. Решить уравнение

$$\sin^2 x + \frac{1}{4}\sin^2 3x = \sin x \sin^2 3x.$$

Первое решение. Запишем уравнение в виде

$$\sin^2 x - \sin x \sin^2 3x + \frac{1}{4}\sin^2 3x = 0$$

и, рассматривая его левую часть как квадратный трехчлен относительно $\sin x$, преобразуем уравнение следующим образом:

$$\sin^2 x - \sin x \sin^2 3x + \frac{1}{4}\sin^4 3x - \frac{1}{4}\sin^4 3x + \frac{1}{2}\sin^2 3x =$$

$$= \left(\sin x - \frac{1}{2}\sin^2 3x\right)^2 + \frac{1}{4}\sin^2 3x(1 - \sin^2 3x) = 0.$$

В результате будем иметь уравнение

$$\left(\sin x - \frac{1}{2}\sin^2 3x\right)^2 + \frac{1}{16}\sin^2 6x = 0.$$

Ясно, что это уравнение удовлетворяется в том и только в том случае, когда оба слагаемых в левой части равны нулю, т. е. выполняется система *двух* уравнений с *одним* неизвестным:

$$\begin{cases} \sin x = \dfrac{1}{2}\sin^2 3x, \\ \sin 6x = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Решением второго уравнения является множество значений $x = \frac{k\pi}{6}$, где k принимает все целые значения.

Из этого множества надо выделить те числа, которые удовлетворяют и первому уравнению. Для нахождения соответствующих значений k подставим $\frac{k\pi}{6}$ вместо x в первое уравнение системы; получим

$$\sin\frac{k\pi}{6} = \frac{1}{2}\sin^2\frac{3k\pi}{6}.$$

Заметим, что

$$\frac{1}{2}\sin^2\frac{3k\pi}{6} = \frac{1}{2}\sin^2\frac{k\pi}{2} = \begin{cases} 0, & \text{если } k \text{ четно}, \\ \dfrac{1}{2}, & \text{если } k \text{ нечетно}. \end{cases}$$

Если k четное, то $\sin\frac{k\pi}{6}=0$, что выполняется при $\frac{k\pi}{6}=l\pi$, где l — любое целое число. Таким образом, среди четных значений k первому уравнению системы (1) удовлетворяют только числа $k=6l$, где l — любое целое число. Если k — нечетное, то $\sin^2\frac{k\pi}{2}=1$, и первое уравнение системы (1) принимает вид

$$\sin\frac{k\pi}{6}=\frac{1}{2},$$

откуда $\frac{k\pi}{6}=(-1)^l\frac{\pi}{6}+l\pi$, где l — любое целое число. Таким образом, среди нечетных значений k первому уравнению системы (1) удовлетворяют только числа $k=6l+(-1)^l$, где l — любое целое число.

Итак, решениями данного уравнения являются следующие значения x

$$x=l\pi,\quad x=(-1)^l\frac{\pi}{6}+l\pi,$$

где l принимает все целые значения.

Второе решение. Заметим прежде всего, что левая часть данного уравнения неотрицательна, поэтому мы должны иметь $\sin x\geqslant 0$. Легко проверить, что все корни уравнения $\sin x=0$, т. е. $x=k\pi$, где k — любое целое число, удовлетворяют уравнению. Найдем все остальные корни (для любого из них $\sin x\neq 0$).

Перенесем теперь в нашем уравнении все в левую часть и сумму квадратов дополним до полного квадрата, причем двумя способами: до квадрата суммы и до квадрата разности; получим

$$\left(\sin x+\frac{1}{2}\sin 3x\right)^2+\sin x\sin 3x(-1-\sin 3x)=0 \qquad (2)$$

и

$$\left(\sin x-\frac{1}{2}\sin 3x\right)^2+\sin x\sin 3x(1-\sin 3x)=0. \qquad (3)$$

Рассмотрим отдельно три случая.

1°. $\sin 3x>0$. Тогда оба слагаемых в левой части уравнения (3) неотрицательны, т. е. данное уравнение эквивалентно в случае $\sin 3x>0$ системе

$$\sin x-\frac{1}{2}\sin 3x=0, \qquad (4)$$

$$\sin x\sin 3x(1-\sin 3x)=0; \qquad (5)$$

так как $\sin x \neq 0$, $\sin 3x > 0$, то из уравнения (5) имеем $\sin 3x = 1$, а тогда из уравнения (4) $\sin x = \frac{1}{2}$.

Итак, надо решить систему

$$\sin x = \frac{1}{2},$$

$$\sin 3x = 1.$$

Но если $\sin x = \frac{1}{2}$, то $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x = 1$, т. е. всякое решение первого уравнения является решением второго уравнения и система сводится к первому уравнению. Таким образом, ее решениями будут углы x из серии $(-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi$, где k принимает все целые значения.

2°. $\sin 3x < 0$. В этом случае воспользуемся уравнением (2). Поскольку $-1 - \sin 3x \leqslant 0$, оба слагаемых в левой части уравнения (2) неотрицательны, значит, данное уравнение при условии $\sin 3x < 0$ эквивалентно системе

$$\sin x + \frac{1}{2} \sin 3x = 0, \tag{6}$$

$$\sin x \sin 3x (-1 - \sin 3x) = 0. \tag{7}$$

Эта система эквивалентна такой:

$$\sin x = \frac{1}{2},$$

$$\sin 3x = -1,$$

которая не имеет решений, так как при $\sin x = \frac{1}{2}$ имеем $\sin 3x = 1$.

3°. $\sin 3x = 0$. В этом случае из данного уравнения следует, что $\sin x = 0$, а мы сейчас находим корни, для которых $\sin x \neq 0$.

Таким образом, все решения данного уравнения можно записать в виде $x = k\pi$, $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi$, где k принимает все целые значения.

Заметим, что это же самое решение можно несколько сократить. Именно, данное уравнение можно представить в виде

$$\left(\sin x - \frac{1}{2} |\sin 3x|\right)^2 + \sin x (|\sin 3x| - \sin^2 3x) = 0.$$

Но $\sin^2 3x \leqslant \sin 3x$ |, поэтому оба слагаемых неотрицательны, так что данное уравнение эквивалентно системе

$$\sin x - \frac{1}{2} \sin 3x = 0,$$

$$\sin x (|\sin 3x| - \sin^2 3x) = 0.$$

Остается рассмотреть (как и выше) случаи $\sin 3x > 0$, $\sin 3x < 0$ и $\sin 3x = 0$.

Третье решение. Предположим, что данное уравнение удовлетворяется некоторым числом x. Перепишем его в виде

$$\sin^2 x = \sin^2 3x\left(\sin x - \frac{1}{4}\right).$$

Отсюда ясно, что $\sin x - \frac{1}{4} > 0$ $\left(\text{если } \sin x - \frac{1}{4} = 0, \text{ то и } \sin x = \frac{1}{4} \text{ и } \sin x = 0\right)$. Умножая неравенство $\sin^2 3x \leqslant 1$ на положительное выражение $\sin x - \frac{1}{4}$, получим неравенство

$$\sin^2 3x\left(\sin x - \frac{1}{4}\right) \leqslant \sin x - \frac{1}{4},$$

причем равенство достигается лишь при $\sin^2 3x = 1$.

Следовательно, должно выполняться и неравенство

$$\sin^2 x \leqslant \sin x - \frac{1}{4},$$

или, что то же $\left(\sin x - \frac{1}{2}\right)^2 \leqslant 0$, которое справедливо лишь при $\sin x = \frac{1}{2}$.

Итак, если некоторое число x удовлетворяет нашему уравнению, то оно удовлетворяет системе

$$\sin^2 3x = 1,$$

$$\sin x = 1.$$

Обратное очевидно: если x удовлетворяет этой системе, то, подставляя $\sin x = 1$ и $\sin^2 3x = 1$ в исходное уравнение, убеждаемся, что оно также удовлетворяется.

Таким образом, данное уравнение равносильно полученной системе, а эта система уже решена выше.

Этот же способ решения уравнения можно было бы несколько видоизменить. Отнимем от обеих частей данного уравнения $\sin x - \frac{1}{4}$; получим

$$\left(\sin x - \frac{1}{2}\right)^2 = (\sin^2 3x - 1)\left(\sin x - \frac{1}{4}\right).$$

Так как $\sin x - \frac{1}{4} > 0$ (это было доказано выше), то правая часть этого уравнения неположительна, а левая неотрицательна, поэ-

тому уравнение удовлетворяется в том и только в том случае, когда $\sin x = \frac{1}{2}$ и или $\sin^2 3x = 1$, или $\sin x - \frac{1}{4} = 0$.

Четвертое решение. Найдем корни данного уравнения, отличные от корней $x = k\pi$, где k принимает все целые значения.

В этом случае ($x \neq k\pi$) имеем $\sin x \neq 0$, $\sin 3x \neq 0$ и, поделив обе части данного уравнения на произведение $\sin x \sin 3x$, получим

$$\frac{\sin x}{\sin^2 3x} + \frac{1}{4 \sin x} = 1.$$

Оба слагаемых в левой части положительны, поэтому можно применить неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим двух положительных чисел:

$$\frac{\sin x}{\sin^2 3x} + \frac{1}{4 \sin x} \geqslant 2 \sqrt{\frac{1}{4 \sin^2 3x}} = \frac{1}{|\sin 3x|} \geqslant 1.$$

В первом из написанных неравенств равенство достигается только при $\frac{\sin x}{\sin^2 3x} = \frac{1}{4 \sin x}$, во втором — при $|\sin 3x| = 1$.

Поэтому левая часть равна 1 в том и только в том случае, когда

$$\begin{aligned} 4 \sin^2 x &= \sin^2 3x, \\ |\sin 3x| &= 1. \end{aligned} \tag{8}$$

Подставляя из второго уравнения $|\sin 3x| = 1$ в первое, получим $4 \sin^2 x = 1$, откуда в силу $\sin x > 0$ будем иметь $\sin x = \frac{1}{2}$.

Таким образом, система (8) равносильна системе

$$\begin{aligned} \sin x &= \frac{1}{2}, \\ |\sin 3x| &= 1, \end{aligned}$$

которую мы фактически выше уже исследовали.

Пятое решение. Как было доказано, корни данного уравнения удовлетворяют неравенству $\sin x \geqslant 0$. Пользуясь формулой $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$ и обозначая $\sin x$ через t, после упрощений получим уравнение седьмой степени относительно t:

$$64t^7 - 16t^6 - 96t^5 + 24t^4 + 36t^3 - 13t^2 = 0.$$

Очевидно, $t = 0$ является корнем (притом двукратным) этого уравнения и оно сводится к уравнению пятой степени:

$$64t^5 - 16t^4 - 96t^3 + 24t^2 + 36t - 13 = 0.$$

Будем подбирать корни этого уравнения. Целыми его корнями могут быть только ± 1 и ± 13; легко проверить, что ни одно из этих чисел не является корнем. Будем подбирать рациональные корни, пользуясь следующей теоремой: «если число $\frac{p}{q}$ является корнем многочлена с целыми коэффициентами, то p является делителем свободного числа, а q — делителем старшего коэффициента». Доказательство этой теоремы проводится аналогично доказательству теоремы о целых корнях целой рациональной функции с целыми коэффициентами.

В данном случае p может принимать значения ± 1, ± 13; q — значения ± 2, ± 4, ± 8, ± 16, ± 32, ± 64. Всего, таким образом, понадобится проверить не больше 48 чисел. Однако первое же испытываемое число $t=\frac{1}{2}$ является корнем, и левую часть уравнения можно разложить на множители:

$$\left(t-\frac{1}{2}\right)(64t^4+16t^3-88t^2-20t+26)=0.$$

Итак, $t=\frac{1}{2}$. Остается решить уравнение

$$32t^4+8t^3-44t^2-10t+13=0.$$

Оказывается, что $t=\frac{1}{2}$ является корнем и для этого уравнения, и оно затем сведется к кубичному уравнению

$$16t^3+12t^2-16t-13=0.$$

Представив левую часть в виде

$$16t(t^2-1)+12(t^2-1)-1=-16\sin x\cos^2 x-12\cos^2 x-1<0$$

(в силу условия $\sin x\geqslant 0$), заключаем, что уравнение $16t^3+12t^2-16t-13=0$ не имеет действительных корней на сегменте $0\leqslant t\leqslant 1$ ($t=\sin x$, $\sin x\geqslant 0$).

Окончательно имеем два корня: $t=0$, $t=\frac{1}{2}$, откуда и получаем ответ: $x=k\pi$, $x=(-1)^l\frac{\pi}{6}+l\pi$, где k и l принимают любые целые значения.

При решении предыдущих задач мы сталкивались с системами нескольких уравнений с одним неизвестным. В то же время предлагались задачи, в которых требуется решить одно уравнение с несколькими неизвестными.

3. Найти все пары чисел x, y, которые удовлетворяют уравнению

$$\operatorname{tg}^4 x+\operatorname{tg}^4 y+2\operatorname{ctg}^2 x\operatorname{ctg}^2 y=3+\sin^2(x+y).$$

Рассмотрим левую часть этого уравнения. Воспользовавшись неравенством $a^4+b^4\geqslant 2a^2b^2$, справедливым, как легко видеть, для любых a и b, будем иметь неравенство

$$\operatorname{tg}^4 x+\operatorname{tg}^4 y\geqslant 2\operatorname{tg}^2 x\operatorname{tg}^2 y,$$

причем равенство достигается только при $\operatorname{tg}^2 x=\operatorname{tg}^2 y$. Далее,

$$\operatorname{tg}^2 x\operatorname{tg}^2 y+\operatorname{ctg}^2 x\operatorname{ctg}^2 y\geqslant 2$$

как сумма взаимно обратных положительных величин, причем равенство достигается лишь при $\operatorname{tg}^2 x\operatorname{tg}^2 y=1$. Таким образом, левая часть нашего уравнения больше или равна 4 и равна 4 только при выполнении равенств

$$\operatorname{tg}^2 x=\operatorname{tg}^2 y,$$

$$\operatorname{tg}^2 x\operatorname{tg}^2 y=1.$$

С другой стороны, $\sin^2(x+y)\leqslant 1$, и, следовательно, правая часть меньше или равна 4.

Таким образом, исходное уравнение удовлетворяется в том и только в том случае, когда обе его части равны 4, так что оно эквивалентно системе

$$\begin{array}{ll}(A) & \operatorname{tg}^2 x=\operatorname{tg}^2 y,\\ (B) & \operatorname{tg}^2 x\operatorname{tg}^2 y=1,\\ (C) & \sin^2(x+y)=1.\end{array}\qquad (1)$$

Из первых двух уравнений имеем $\operatorname{tg}^2 x=\operatorname{tg}^2 y=1$, т. е.

$$\operatorname{tg} x=\pm 1,\quad \operatorname{tg} y=\pm 1,$$

откуда $x=\frac{\pi}{4}(2k+1)$, $y=\frac{\pi}{4}(2n+1)$, где k и n принимают все целые значения. Из всех полученных таким образом пар значений для x и y решение данного уравнения образуют только те, при которых выполнено и третье уравнение системы (1). Заметим, что

$$\sin^2(x+y)=\sin^2\left[\frac{\pi}{2}(k+n+1)\right]=\begin{cases}1, & \text{если } k+n+1 \text{ нечетное},\\ 0, & \text{если } k+n+1 \text{ четное}.\end{cases}$$

Отсюда следует, что из решений системы, состоящей из двух уравнений (A) и (B), надо взять такие пары k и n, для которых сумма $k+n=2m$ четная, т. е. $n=2m-k$, где m—любое целое число.

Итак, всеми решениями данного уравнения будут пары x, y вида

$$x=\frac{\pi}{4}(2k+1),\quad y=\frac{\pi}{4}(4m-2k+1),$$

где m и k — любые целые числа.

Второе решение.

$$\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{tg}^4 y + \operatorname{ctg}^2 x \operatorname{ctg}^2 y = (\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg}^2 y)^2 + 2(\operatorname{tg}^2 x \operatorname{tg}^2 y + \operatorname{ctg}^2 x \operatorname{ctg}^2 y) = (\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg}^2 y)^2 + 2(\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y - \operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y)^2 + 4.$$

Данное уравнение принимает вид

$$(\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg}^2 y)^2 + 2(\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y - \operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y)^2 + 1 = \sin^2(x + y).$$

Левая часть этого уравнения больше или равна 1, а правая меньше или равна 1. Поэтому уравнение удовлетворяется в том и только в том случае, когда обе части равны 1, т. е. когда выполняется система

$$\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg}^2 y = 0,$$

$$\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y - \operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y = 0,$$

$$\sin^2(x + y) = 1.$$

Эта система решается так же, как и выше.

4. Найти все пары чисел x, y, которые удовлетворяют уравнению

$$\cos x + \cos y - \cos(x + y) = \frac{3}{2}.$$

Первое решение. Идея, которая может возникнуть при решении одного уравнения с двумя неизвестными, такова: выразить одно неизвестное через другое, и тогда, придавая всевозможные значения этому неизвестному, получать соответствующие значения другого. В данной задаче этот метод приводит к цели. Выразим y через x. Перепишем данное уравнение так:

$$\cos x + 2 \sin\left(\frac{x}{2} + y\right) \sin\frac{x}{2} = \frac{3}{2}.$$

Ясно, что $\sin\frac{x}{2} \neq 0$ $\left(\text{иначе } \cos x = \frac{3}{2}\right)$ и поэтому

$$\sin\left(\frac{x}{2} + y\right) = \frac{\frac{3}{2} - \cos x}{2 \sin\frac{x}{2}}. \qquad (1)$$

Отсюда можно найти y, если, конечно, правая часть по модулю меньше или равна 1.

Решим неравенство

$$\left| \frac{\frac{3}{2} - \cos x}{2 \sin\frac{x}{2}} \right| \leqslant 1.$$

Перепишем его в виде

$$\left|\frac{3}{2}-\cos x\right|\leqslant 2\left|\sin\frac{x}{2}\right|,$$

или $\left(\text{поскольку } \frac{3}{2}-\cos x>0\right)$

$$\frac{3}{2}-\cos x\leqslant 2\left|\sin\frac{x}{2}\right|.$$

Но $\cos x=1-2\sin^2\frac{x}{2}$ и, обозначая $\left|\sin\frac{x}{2}\right|$ через t, будем иметь неравенство

$$\frac{1}{2}+2t^2\leqslant 2t,$$

или, что то же,

$$4t^2-4t+1\leqslant 0, \quad \text{или} \quad (2t-1)^2\leqslant 0.$$

Отсюда

$$t=\frac{1}{2}.$$

Итак, правая часть уравнения (1) не превосходит по модулю 1 только при $\left|\sin\frac{x}{2}\right|=\frac{1}{2}$, т. е. при $\sin\frac{x}{2}=\pm\frac{1}{2}$. При остальных значениях $\sin\frac{x}{2}$ уравнение не имеет решений.

При $\sin\frac{x}{2}=\frac{1}{2}$, $\frac{x}{2}=(-1)^k\frac{\pi}{6}+k\pi$, или $x=(-1)^k\frac{\pi}{3}+2k\pi$, где k принимает все целые значения. Но если $\sin\frac{x}{2}=\frac{1}{2}$, то $\cos x=\frac{1}{2}$, а тогда из уравнения (1) находим $\sin\left(\frac{x}{2}+y\right)=\dfrac{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}{2\cdot\frac{1}{2}}=1$,

$y=2n\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}$, где n — любое число.

При $\sin\frac{x}{2}=-\frac{1}{2}$, т. е. $\frac{x}{2}=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+k\pi$, или $x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{3}+2k\pi$, где k — любое целое число, имеем $\cos x=\frac{1}{2}$, а тогда

$$\sin\left(\frac{x}{2}+y\right)=\frac{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}{2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}=-1$$

и

$$y = 2n\pi - \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} = 2n\pi - \frac{\pi}{2} - (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} - k\pi,$$

где n — любое целое число.

Ответ:

$$x = (-1)^k \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad y = \frac{\pi}{2} + (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + (2n-k)\pi;$$

$$x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad y = -\frac{\pi}{2} + (-1)^k \frac{\pi}{6} + (2n-k)\pi,$$

где k, n принимают все целые значения.

Второе решение. Переносим все в левую часть и, пользуясь тригонометрическими формулами, перепишем уравнение в виде

$$2\cos^2\frac{x+y}{2} - 1 - 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} + \frac{3}{2} = 0,$$

или

$$\cos^2\frac{x+y}{2} - \cos\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2} + \frac{1}{4} = 0.$$

Получившееся уравнение преобразуем следующим образом:

$$\left(\cos\frac{x+y}{2} - \frac{1}{2}\cos\frac{x-y}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(1 - \cos^2\frac{x-y}{2}\right) = 0.$$

Поскольку оба слагаемых в левой части уравнения неотрицательны, то данное уравнение эквивалентно системе уравнений

$$\cos\frac{x+y}{2} = \frac{1}{2}\cos\frac{x-y}{2},$$

$$\cos^2\frac{x-y}{2} = 1.$$

Второе уравнение системы, очевидно, равносильно уравнению $\sin\frac{x-y}{2} = 0$ и, решая его, получаем $x - y = 2n\pi$, где n — любое целое число. Следовательно,

$$\cos\frac{x-y}{2} = \cos n\pi = (-1)^n.$$

Рассмотрим отдельно четные и нечетные значения n. Если n — четное, $n = 2k$ (k — любое целое число), то из первого уравнения имеем

$\cos\frac{x+y}{2}=\frac{1}{2}$, т. е. $x+y=\pm\frac{2\pi}{3}+4\pi l$, где l — любое целое число, и таким образом, имеем систему

$$x+y=\pm\frac{2\pi}{3}+4\pi l,$$

$$x-y=4\pi k.$$

Отсюда $x=2(k+l)\pi\pm\frac{\pi}{3}$, $y=2(l-k)\pi\pm\frac{\pi}{3}$, где k и l — любые целые числа, причем перед $\frac{\pi}{3}$ в этих формулах берутся одновременно либо знак плюс, либо одновременно знак минус.

При n нечетном, $n=2k+1$, совершенно аналогично получаем $\cos\frac{x+y}{2}=-\frac{1}{2}$, т. е. $x+y=\pm\frac{4\pi}{3}+4\pi l$, где l — любое целое число, и, таким образом, имеем систему

$$x+y=\pm\frac{4\pi}{3}+4\pi l,$$

$$x-y=2(2k+1)\pi.$$

Отсюда

$$x=(2l+2k+1)\pi\pm\frac{2\pi}{3},$$

$$y=(2l-2k-1)\pi\pm\frac{2\pi}{3},$$

где k и l принимают все целые значения, причем в этих формулах перед $\frac{2\pi}{3}$ берется одновременно знак плюс или одновременно знак минус.

Следующая задача такого типа сводится к тригонометрическому неравенству, для доказательства которого требуется проявить известную изобретательность.

5. Найти все пары чисел x, y, удовлетворяющие уравнению

$$\left(\sin^2 x+\frac{1}{\sin^2 x}\right)^2+\left(\cos^2 x+\frac{1}{\cos^2 x}\right)^2=12+\frac{1}{2}\sin y.$$

Первое решение. Преобразуем левую часть данного уравнения следующим образом:

$$\sin^4 x+\frac{1}{\sin^4 x}+\cos^4 x+\frac{1}{\cos^4 x}+4=$$

$$=(\sin^4 x+\cos^4 x)\left(1+\frac{1}{\sin^4 x\cos^4 x}\right)+4=$$

$$= (1 - 2\sin^2 x \cos^2 x)\left(1 + \frac{1}{\sin^4 x \cos^4 x}\right) + 4 =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x\right)\left(1 + \frac{16}{\sin^4 2x}\right) + 4;$$

данное уравнение примет вид

$$(2 - \sin^2 2x)\left(1 + \frac{16}{\sin^4 2x}\right) = 16 + \sin y.$$

Но $2 - \sin^2 2x \geqslant 1$, $1 + \frac{16}{\sin^4 2x} \geqslant 17$, причем знаки равенства имеют место тогда и только тогда, когда $\sin^2 2x = 1$. Поэтому левая часть данного уравнения больше или равна 17, а правая часть меньше или равна 17. Отсюда следует, что данное уравнение равносильно системе

$$\sin^2 2x = 1,$$

$$\sin y = 1,$$

решение которой состоит из пар x, y вида $x = \frac{\pi}{4}(2k + 1)$, $y = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, где k, n принимают все целые значения.

Второе решение. Преобразуем уравнение так же, как и раньше. Обозначив для краткости $\sin^2 2x$ через z, будем иметь

$$\sin y = (2 - z)\left(1 + \frac{16}{z^2}\right) - 16.$$

Это соотношение возможно тогда и только тогда, когда удовлетворяется условие

$$-1 \leqslant (2 - z)\left(1 + \frac{16}{z^2}\right) - 16 \leqslant 1,$$

или после ряда преобразований

$$15z^2 \leqslant -z^3 + 2z^2 - 16z + 32 \leqslant 17z^2.$$

Перепишем эту систему двух неравенств так:

$$z^3 + 15z^2 + 16z - 32 \geqslant 0, \qquad (1)$$

$$z^3 + 13z^2 + 16z - 32 \leqslant 0. \qquad (2)$$

Так как $z = 1$ — корень функции $z^3 + 15z^2 + 16z - 32$, то неравенство (1) можно переписать в виде

$$(z - 1)(z^2 + 16z + 32) \geqslant 0,$$

или

$$(z - 1)\left[z - (8 - 4\sqrt{2})\right]\left[z - (8 + 4\sqrt{2})\right].$$

Решая это неравенство, получаем

$$1 \leqslant z \leqslant 8-4\sqrt{2}, \quad z \geqslant 8+4\sqrt{2}. \qquad (2')$$

Однако $z=\sin^2 2x \leqslant 1$, так что из неравенства (2′) следует, что $z=1$. Таким образом, первое неравенство системы имеет единственное решение $z=1$. Непосредственной подстановкой проверяется, что это решение $z=1$ удовлетворяет и второму неравенству, т. е. является решением системы (1), (2).

Итак, данное уравнение имеет решение только при $\sin^2 2x=1$. Но тогда из него получаем, что $\sin y=1$. В результате приходим к прежней системе

$$\sin^2 2x = 1,$$

$$\sin y = 1.$$

Заметим, что первое решение короче, но второе естественнее, так как в нем более ясна цель того или иного рассуждения.

Очень серьезные трудности, причем самого главного, логического, характера вызывают обычно уравнения и системы уравнений с параметрами, в которых требуется найти такие значения этих параметров, при которых выполняются указанные требования: например, уравнение имеет единственное решение, или, наоборот, удовлетворяется всеми допустимыми значениями, или всякое решение одной системы уравнений является решением другой системы и т. п.

Эти задачи являются, пожалуй, наиболее трудными из всех, которые мы здесь рассматриваем, именно потому, что они требуют высокой логической культуры — того, чего не хватает многим из поступающих. Чтобы решить такую задачу, необходимо в каждый момент представлять себе, что уже сделано, что еще надо сделать, что означают полученные результаты.

6. Найти все пары чисел a и b, для которых всякая пара чисел x и y $\left(x \neq n\pi+\frac{\pi}{2}, \quad y \neq m\pi+\frac{\pi}{2};\ n,\ m=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots\right)$, удовлетворяющая уравнению

$$x+y=a, \qquad (1)$$

удовлетворяет также уравнению

$$\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y+\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y=b. \qquad (2)$$

Решение*. Так как $x \neq n\pi+\frac{\pi}{2}$ и $y \neq m\pi+\frac{\pi}{2}$ при всех целых значениях n и m, то $\cos x \neq 0$, $\cos y \neq 0$, значит, умножая обе части соотношения (2) на $\cos x \cos y$, получаем соотношение, эквивалентное соотношению (2):

$$\sin x \cos y+\sin y \cos x+\sin x \sin y=b \cos x \cos y,$$

$$\sin (x+y)-(\cos x \cos y-\sin x \sin y)=(b-1) \cos x \cos y,$$

* Решение принадлежит П. С. Моденову.

$$\sin(x+y)-\cos(x+y)=\frac{1}{2}(b-1)[\cos(x-y)+\cos(x+y)],$$

$$2\sin(x+y)-(b+1)\cos(x+y)=(b-1)\cos(x-y). \qquad (3)$$

Предположим, что существуют такие значения a и b, что из соотношения $x+y=a$, где x и y подчинены неравенствам, заданным в условии задачи, следует соотношение (2), или, что то же самое, соотношение (3). Но соотношение (3) при условии $x+y=a$ принимает вид

$$2\sin a-(b+1)\cos a=(b-1)\cos(x-y). \qquad (4)$$

Докажем, что если $b\neq 1$, то существуют пары значений x, y, удовлетворяющих условию $x+y=a$ и неравенствам, данным в условии задачи, при которых, однако, правая часть равенства (4) принимает различные значения. В самом деле, каково бы ни было число a, всегда можно найти таких два различных значения p и q из интервала $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, что, полагая

$$x_1=\frac{a}{2}+p, \quad y_1=\frac{a}{2}-p,$$

$$x_2=\frac{a}{2}+q, \quad y_2=\frac{a}{2}-q,$$

можно утверждать, что x_1, y_1, x_2, y_2 удовлетворяют неравенствам, данным в условии задачи.

Так как при этом

$$x_1+y_1=a,$$

$$x_2+y_2=a,$$

$$x_1-y_1=2p,$$

$$x_2-y_2=2q$$

и оба числа $2p$ и $2q$ различны и лежат в интервале $(0, \pi)$, то при $b\neq 1$ правая часть равенства (4), т. е. $(b-1)\cos(x-y)$, для $x=x_1$, $y=y_1$ принимает значение $(b-1)\cos 2p$, а при $x=x_2$, $y=y_2$ — значение $(b-1)\cos 2q$. Значит, $b=1$. Но тогда из того же соотношения (4) следует, что $\operatorname{tg} a-1=0$, откуда $\operatorname{tg} a=1$, т. е.

$$a=s\pi+\frac{\pi}{4},$$

где s — целое число.

Обратно, если s — *любое* целое число и $b=1$, то из соотношения $x+y=a$ следует равенство

$$\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y+\operatorname{tg} x\operatorname{tg} y=b,$$

так как оно эквивалентно соотношению (3), которое при $b=1$, $a=s\pi+\frac{\pi}{2}$ обращается в тождество.

7. Найти, при каких значениях p уравнение

$$1+p\sin x-p^2=-\sin^2 x$$

имеет решение.

Запишем это уравнение в виде

$$\sin^2 x+p\sin x+1-p^2=0.$$

Это уравнение квадратное относительно $\sin x$, и для того чтобы ответить на вопрос задачи, нужно найти значения, при которых корни уравнения

$$t^2+pt+1-p^2=0$$

действительны, и хотя бы один корень не превосходит по модулю 1.

Проведем некоторые предварительные рассуждения. Рассмотрим квадратный трехчлен $t^2+pt+1-p^2$. Найдем все значения t, при которых этот трехчлен имеет хотя бы один корень на сегменте $-1\leqslant t\leqslant 1$.

Для удобства дальнейших рассуждений сначала ограничимся случаем, когда корни трехчлена отличны от -1 и 1. Тогда требуемое условие выполняется в следующих трех случаях.

1°. Бóльший корень лежит в интервале $-1<t<1$, а меньший — меньше -1.

2°. Меньший корень лежит в интервале $-1<t<1$, а больший — больше 1.

3°. Оба корня лежат в интервале $-1<t<1$.

Случай 1° выполняется тогда и только тогда, когда рассматриваемый трехчлен отрицателен при $t=-1$ и положителен при $t=1$, т. е.

$$1-p+1-p^2<0,$$
$$1+p+1-p^2>0,$$

или

$$p^2+p-2>0,$$
$$p^2-p-2<0.$$

Решение этой системы: $1<p<2$. Случай 2° выполняется тогда и только тогда, когда рассматриваемый трехчлен положителен при $t=-1$ и отрицателен при $t=1$:

$$1-p+1-p^2>0,$$
$$1+p+1-p^2<0,$$

или

$$p^2+p-2<0,$$

$$p^2-p-2>0.$$

Решение этой системы: $-2<p<-1$.

В случае 3° трехчлен положителен и при $t=-1$ и при $t=1$. Однако это условие недостаточно для случая 3°; во-первых, надо потребовать, чтобы корни были действительны (почему это не надо специально оговаривать в предыдущих случаях?), во-вторых, это условие не исключает случаев, когда оба корня больше 1 и когда они меньше 1. Ясно, что исключить последние два случая можно, наложив условие, чтобы абсцисса вершины параболы, т. е. число $t=-\frac{p}{2}$, лежало в интервале $-1<t<1$. Для действительности корней нужно потребовать, чтобы был неотрицателен дискриминант $5p^2-4$ данного трехчлена. Таким образом, имеем систему неравенств

$$5p^2-4\geqslant 0,$$

$$-1<-\frac{p}{2}<1,$$

$$1-p+1-p^2>0,$$

$$1+p-1-p^2>0,$$

или

$$|p|\geqslant\frac{2}{\sqrt{5}},$$

$$|p|>2,$$

$$p^2+p-2<0,$$

$$p^2-p-2<0.$$

Решение этой системы состоит из двух интервалов:

$$-1<p<-\frac{2}{\sqrt{5}},\quad \frac{2}{\sqrt{5}}<p<1.$$

Остается еще рассмотреть случай, когда трехчлен имеет корнями числа -1 и 1. Очевидно, 1 является корнем при $p=-1$ и $p=2$, а -1 является корнем при $p=1$ и $p=-2$. Эти четыре значения p также удовлетворяют требуемым условиям.

Итак, все значения p, при которых данное уравнение имеет решение

$$-2 \leqslant p \leqslant -\frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \frac{2}{\sqrt{5}} \leqslant p \leqslant 2,$$

или

$$\frac{2}{\sqrt{5}} \leqslant |p| \leqslant 2.$$

§ 9. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ПРИМЕРЫ И ЗАДАЧИ

АРИФМЕТИКА И АЛГЕБРА

I. Задачи по арифметике (с решениями)

1. а) Доказать, что если две правильные дроби в сумме равны единице, то их знаменатели равны.

б) Пусть $\frac{a}{c}$ и $\frac{b}{d}$ — две положительные несократимые дроби, такие, что

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{d}\right)^2 = 1.$$

Доказать, что одно из чисел a или b делится на 4 и что одно из них делится на 3.

Решение: а) $\frac{a}{c} + \frac{b}{d} = 1$, $\frac{a}{c} = \frac{d-b}{d}$. Числа $d-b$ и d взаимно простые, так как в противном случае числа d и b были бы не взаимно простые. Следовательно, дробь

$$\frac{d-b}{d}$$

несократима, и потому $c=d$.

б) Так как $\frac{a}{c}$ и $\frac{b}{d}$ — правильные несократимые дроби, то $\left(\frac{a}{c}\right)^2$ и $\left(\frac{b}{d}\right)^2$ — также правильные несократимые дроби; но

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{d}\right)^2 = 1, \tag{1}$$

значит, на основании а) их знаменатели равны, т. е. $c^2=d^2$. Таким образом,

$$a^2 + b^2 = c^2; \tag{2}$$

a и c — взаимно простые по условию; b и c ($d=c$) также взаимно простые. Значит, a и b — взаимно простые, так как если бы a и b имели общий множитель $k\neq 1$, то в силу равенства (2) c также делилось бы на k. Но тогда a и c не были бы взаимно простыми.

Заметим теперь, что квадрат любого четного числа делится на 4, а квадрат любого нечетного числа при делении на 4 в остатке дает 1. Поэтому одно из чисел a или b должно быть четным, так как в противном случае число c^2, равное a^2+b^2, при делении на 4 дало бы в остатке 2, что невозможно.

Предположим, что четным является число a, т. е. $a=2a'$; тогда b и c — обязательно нечетные: $b=2b'+1$ и $c=2c'+1$. Тогда равенство (2) примет вид

$$4a'^2+(2b'+1)^2=(2c'+1)^2,$$

или

$$4a'^2=(2c'+1)^2-(2b'+1)^2,$$

или

$$4a'^2=(2c'+2b'+2)(2c'-2b'),$$

$$a'^2=(c'+b'+1)(c'-b').$$

Разность чисел $c'+b'+1$ и $c'-b'$ равна $2b'+1$, т. е. число нечетное; значит, $c'+b'+1$ и $c'-b'$ имеют разную четность и одно из них делится на 2.

Поэтому из равенства

$$a'^2=(c'+b'+1)(c'-b')$$

следует, что a' делится на 2.

Но $a=2a'$, значит, a делится на 4. Теперь докажем, что одно из чисел a или b делится на 3.

Докажем сначала, что если квадрат всякого натурального числа не делится на 3, то при делении на 3 получается в остатке 1.

Действительно, все натуральные числа, не делящиеся на 3, можно записать либо в виде $3k+1$, либо в виде $3k+2$, где k — любое натуральное число.

Тогда

$$(3k+1)^2=9k^2+6k+1,$$

$$(3k+2)^2=9k^2+12k+3+1.$$

Предположим, что ни a, ни b не делятся на 3. Пусть $a=3k+1$, $b=3l+1$, тогда $c^2=a^2+b^2=9k^2+6k+9l^2+6l+2$, значит, квадрат нечетного числа при делении на 3 дает в остатке 2, что невозможно.

Пусть $a=3k+1$, $b=3l+2$, тогда $c^2=a^2+b^2=9k^2+6k+9l^2+12l+3+2$, и мы приходим к тому же противоречию.

Аналогично выводится то же самое, если предположить, что $a=3k+2$, $b=3l+1$, или $a=3k+2$, $b=3l+2$.

2. Есть ли 401 простое число? Решить уравнение

$$x^2 - y^2 = 401$$

в целых положительных числах.

Р е ш е н и е. Число 401 не делится на числа 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 и 19, меньшие числа 20, которое является значением $\sqrt{401}$ с недостатком с точностью до 1. Значит, 401 — число простое. Поэтому из уравнения

$$(x-y)(x+y) = 401$$

следует, что

$$x - y = 1,$$
$$x + y = 401$$

и, значит,

$$x = 201, \quad y = 200.$$

3. 1°. Определить натуральное число n, такое, чтобы дробь

$$\frac{n+4}{n-3}$$

была натуральным числом.

2°. Определить натуральное число $n>3$ так, чтобы дробь

$$\frac{n+4}{n-3}$$

была равна 1,24 с избытком с точностью до $\frac{1}{100}$.

Р е ш е н и е. 1°.

$$\frac{n+4}{n-3} = 1 + \frac{7}{n-3}.$$

Отсюда или $n-3=1$, или $n-3=7$. Соответствующие значения $n=4$ и $n=10$.

2°. Из неравенств

$$1{,}23 < 1 + \frac{7}{n-3} < 1{,}25,$$

или

$$0{,}23 < \frac{7}{n-3} < 0{,}25,$$

находим

$$\frac{7}{0,25} < n-3 < \frac{7}{0,23},$$

$$31 < n < \frac{7}{0,23} + 3,$$

$$31 < n < 33,4.$$

Значит, существуют два значения n, удовлетворяющие условию задачи: $n=32$, при котором

$$\frac{n+4}{n-3} \cong 1,24$$

с точностью до 0,01 с недостатком, и $n=33$, при котором

$$\frac{n+4}{n-3} \cong 1,24$$

с избытком.

4. Найти все натуральные числа n, для которых натуральное число $m=n^2+n+1$ делится на 13.

Р е ш е н и е. Число n^2+n+1 делится на 13 тогда и только тогда, когда делится на 13 число

$$n^2+n+1-13=(n-3)(n+4),$$

т. е. когда

$$(n-3)(n+4)=13k.$$

Так как 13 простое число, то на 13 должно делиться либо n—3, либо $n+4$, т. е.

или n—3$=13p$, или $n+4=13p$, откуда

$$n=3+13p,$$

или

$$n=13p-4,$$

где p принимает все целые положительные значения (в соотношении же $n=3+13p$ можно еще взять $p=0$; тогда $n=3$ и, действительно, при $n=3$ имеем $n^2+n+1=13$).

5. Рассмотрим натуральное число $m=n^4+n^2+1$, где n также натуральное число.

1°. Разложить m в произведение двух множителей второй степени относительно n с целыми коэффициентами.

2°. Может ли число m быть простым?

Р е ш е н и е. 1°. **Разложение m на множители**

$$m=n^4+2n^2+1-n^2=(n^2+n+1)(n^2-n+1).$$

Введем обозначения

$$p = n^2 + n + 1, \quad q = n^2 - n + 1.$$

Общий делитель p и q должен быть делителем и чисел

$$p + q = 2(n^2 + 1),$$

$$p - q = 2n.$$

Далее, каково бы ни было n, четное или нечетное, числа p и q всегда нечетные; в самом деле,

$$p = n^2 + n + 1 = n(n+1) + 1,$$

$$q = n^2 - n + 1 = n(n-1) + 1,$$

значит, общий делитель p и q не может быть равен 2, а значит, общий делитель чисел $p+q$ и $p-q$ есть общий делитель чисел n^2+1 и n. Но если λ этот общий делитель, т. е. n делится на λ, то на λ делится и n^2, значит, делится и n^2+1, что возможно только в случае $\lambda=1$. Итак, p и q — взаимно простые.

2°. **Случай, когда m — простое число.** Число m простое тогда и только тогда, когда $q=1$, т. е. $n^2-n=0$; отсюда $n=1$ и, значит, $m=3$.

6. Шестизначное число N имеет вид

$$N = \overline{abcabc};$$

c — число единиц и число тысяч; b — число сотен и число десятков тысяч, a — число сотен и число сотен тысяч ($a \neq 0$).

1°. Доказать, что N есть произведение числа $\overline{abc}$ на некоторое натуральное число.

Доказать, что:

α) N делится на 7, 11 и 13;

β) N не является квадратом натурального числа.

2°. Определить число N указанного вида, обладающее одновременно двумя свойствами:

α) N делится на 5;

β) $\overline{bc} = 2a$.

Разложить полученное таким образом число на простые множители.

Решение. 1°. **Вычисление N.** $\overline{abcabc} = \overline{abc} \cdot 1000 + \overline{abc} = \overline{abc}(1000+1) = \overline{abc} \cdot 1001$.

α) **N делится на 7, 11 и 13.** Это следует из того, что $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$.

β) **N не есть точный квадрат.** Необходимое условие того, что N есть точный квадрат, состоит в том, что в разложении N на простые множители числа 7, 11 и 13 должны входить в четной степени. Но $N = \overline{abc} \cdot 1001$, значит, $\overline{abc}$ должно делиться на 7, 11, 13, т. е. на 1001, что невозможно, так как $\overline{abc}$ трехзначное число.

2°. **Вычисление N, удовлетворяющее соответствующим условиям.** N делится на 5 тогда и только тогда, когда $c=0$ или $c=5$. Но число $c=5$ исключается в силу условия $\overline{bc}=2a$, т. е. число $\overline{bc}$ должно быть четным. Значит, $c=0$. С другой стороны, $2a=\overline{b0}$ — меньше 20, поэтому надо взять $b=1$, следовательно, $a=5$. Искомое число

$$N = 510\,510.$$

Разложение N на простые множители. $N=510\,510=1001\cdot 510=$ $=51\cdot 10\cdot 1001$, и так как $51=3\cdot 17$, то

$$510\,510=2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 17$$

(произведение семи первых простых чисел!).

7. Доказать, что два последовательных целых положительных числа — взаимно простые. Доказать, что если a и b — два натуральных взаимно простых числа, то a и $a+b$ — взаимно простые, b и $a+b$ — взаимно простые, ab и $a+b$ — взаимно простые.

Может ли быть сократимой дробь

$$\frac{2n+5}{(n+2)(n+3)},$$

где n — натуральное число?

Решение. **Свойство двух последовательных натуральных чисел.** Пусть $D(n, n+1)$ — наибольший общий делитель натуральных чисел n и $n+1$. Тогда разность $n+1-n=1$ должна делиться на D, т. е. $D=1$, а значит, n и $n+1$ — взаимно простые.

Изучение пар $(a, a+b)$ и $(b, a+b)$, если a и b — взаимно простые натуральные числа. Пусть $D(a, a+b)$ — наибольший общий делитель чисел a и $a+b$. Тогда на D должны делиться числа a и $a+b-a=b$. Но так как a и b — взаимно простые, то $D=1$.

Аналогично доказывается, что b и $a+b$ — взаимно простые.

Замечание. Если $D(a, b)$ — наибольший общий делитель натуральных чисел a и b, то следующие положения эквивалентны:

$$D(a, b)=1 \rightleftarrows D(a, a+b)=D(b, a+b)=1.$$

Изучение пары $(ab, a+b)$. Заметим сначала, что наибольший общий делитель двух натуральных чисел не изменится, если одно из них разделить или умножить на число, взаимно простое с другим. Если a и b — взаимно простые натуральные числа, то a и $a+b$ — взаимно простые, значит, ab и $a+b$ — взаимно простые.

Другое доказательство. На натуральное число $D(ab, a+b)$ делятся числа ab и $a+b$, следовательно, на число D разделятся числа $a(a+b)-ab=a^2$ и $b(a+b)-ab=b^2$, и так как a^2 и b^2 — взаимно простые (в силу $D(a, b)=1$), то $D=1$.

Изучение дроби $\frac{2n+5}{(n+2)(n+3)}$. Числа $n+2$ и $n+3$ взаимно простые и, значит, взаимно простые пара чисел $n+2+n+3=2n+5$

и $(n+2)(n+3)$; таким образом, рассматриваемая дробь несократима.

8. Доказать, что если n — любое натуральное число, то n и n^5 оканчиваются на одну и ту же цифру.

Доказательство: достаточно показать, что $n^5-n=n(n^4-1)$ делится на 10. Сначала докажем, что если n не делится на 5, то n^4-1 делится на 5. В самом деле, всякое натуральное число n, не делящееся на 5, можно представить в одном из следующих видов:

$$5k+1,\ 5k+2,\ 5k+3,\ 5k+4,$$

где k — любое натуральное число.

Теперь находим:

$$n^4-1=(1+5k)^4-1 \quad \text{делится на 5,}$$

$$n^4-1=(2+5k)^4-1 \quad \text{делится на 5,}$$

$$n^4-1=(3+5k)^4-1 \quad \text{делится на 5,}$$

$$n^4-1=(4+5k)^4-1 \quad \text{делится на 5.}$$

Далее, число $n(n^4-1)=(n-1)n(n+1)(n^2+1)$ — четное, так как из двух множителей n и $n+1$ один четный.

Итак, если n не делится на 5, то $n^5-n=n(n^4-1)$ делится на 5 и на 2, следовательно, на 10. Но если n делится на 5, то $n^5-n=(n-1)n(n+1)(n^4+1)$ — число четное, а значит, по-прежнему n^5-n делится на 10.

9. Доказать, что n^p и n^{p+4}, где n и p — любые натуральные числа, оканчиваются на одну и ту же цифру.

Доказательство: достаточно показать, что $n^{p+4}-n^p$ делится на 10. Имеем

$$n^{p+4}-n^p=n^{p-1}\cdot n(n^4-1).$$

Но число $n(n^4-1)$ делится на 10 (см. предыдущую задачу).

10. Пусть n — произвольное натуральное число. Какие остатки могут получиться при делении n^4 на 5?

Решение. Если n делится на 5, то остаток равен 0. Если n имеет вид $1+5k$, где k — любое натуральное число, то $n^4=1+4\times\times 5k+\ldots$ и, значит, n^4 при делении на 5 дает в остатке 1.

Если $n=2+5k$, то

$$n^4=2^4+4\cdot 2^3\cdot 5k+\ldots=1+15+4\cdot 2^3\cdot 5k+\ldots$$

Отсюда видно, что остаток от деления n^4 на 5 равен 1. Если $n=3+5k$, то

$$n^4=3^4+4\cdot 3^3\cdot 5k+\ldots=1+80+4\cdot 3^3\cdot 5k+\ldots,$$

остаток от деления n на 5 равен 1.

Наконец, если $n=4+5k$, то

$$n^4 = 4^4 + 4 \cdot 4^3 \cdot 5k + \ldots = 1 + 255 + 4 \cdot 4^3 \cdot 5k + \ldots$$

дает 1 в остатке от деления на 5.

Итак, остаток от деления n^4 на 5, где n — произвольное натуральное число, всегда равен или 0, или 1.

11. а) Определить возможно более простым способом остатки от деления на число 7 следующих чисел:

$$5,\ 5^2,\ 5^3,\ 5^4,\ 5^5,\ 5^6 \text{ и } 5^7.$$

б) Найти все натуральные числа n, такие, что 19^n при делении на 7 дает в остатке 2.

в) Вычислить остаток от деления 19^{64} на 7.

Решение. а) Остаток от деления 5 на 7 равен 5. Остаток от деления $5^2=25$ на 7 равен 4. Теперь заметим, что если натуральные числа m и n при делении на натуральное число k дают остатки, соответственно равные p и q, то остаток от деления mn на k равен остатку от деления pq на k. В самом деле,

$$mn = (mk + p)(nk + q) = mnk^2 + (m + n)k + pq.$$

Значит, остаток от деления на 7 числа 5^3 равен остатку от деления числа $5 \cdot 4 = 20$ на 7, т. е. 6. Остаток от деления 5^4 на 7 равен остатку от деления $5 \cdot 6 = 30$ на 7, т. е. 2. Остаток от деления 5^5 на 7 равен остатку от деления $5 \cdot 2 = 10$ на 7, т. е. 3. Остаток от деления 5^6 на 7 равен остатку от деления на 7 числа $3 \cdot 5 = 15$, т. е. 1, и, наконец, остаток от деления на 7 числа 5^7 равен снова 5.

Вообще, если $n=6k+n'$, где k — любое натуральное число, а n' равно одному из чисел 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, то остатки от деления на 7 чисел 5^n и $5^{n'}$ равны между собой.

б) **Отыскание натуральных чисел n, таких, что 19 при делении на 7 дает в остатке 2.** Так как 19 при делении на 7 дает в остатке 5, то 19^n и 5^n при делении на 7 дают одни и те же остатки, значит, 19^n и $5^{n'}$, где $n=6k+n'$ (см. предыдущий параграф), при делении на 7 дают один и тот же остаток. Но так как $n'<7$, то на основании предыдущего параграфа остаток от деления $5^{n'}$ на 7 будет равен 2 только при $n'=4$. Итак,

$$n = 6k + 4,$$

где k — любое натуральное число или нуль.

в) **Остаток от деления 19^{64} на 7.** Так как $64=6 \cdot 10+4$, то этот остаток равен 2.

12. 1°. Найти общий наибольший делитель чисел 24 101 и 18 780.

2°. Найти все решения в целых числах уравнения

$$18\,780x - 24\,101y = 313,$$

зная одно из решений

$$x = 9, \quad y = 7.$$

Р е ш е н и е. 1°. $D\,(24\,101,\ 18\,780)=313$.
2°. Данное уравнение принимает вид

$$60x-77y=1,$$

и так как

$$60\cdot 9-77\cdot 7=1,$$

то, вычитая почленно, будем иметь

$$60(x-9)-77(y-7)=0. \qquad (1)$$

Но так как числа 60 и 77 взаимно простые, то x—9 должно делиться на 77, а y—7 — на 60, и эти частные в силу соотношения (1) должны быть равны между собой:

$$\frac{x-9}{77}=\frac{y-7}{60}=n,$$

откуда

$$x=9+77n,$$
$$y=7+60n,$$

где n принимает все целые значения.

З а м е ч а н и е. Уравнение

$$60x-77y=1$$

в целых числах можно решать и так:

$$x=\frac{77y+1}{60}=y+\frac{17y+1}{60},$$
$$\frac{17y+1}{60}=z,$$
$$y=\frac{60z-1}{17}=3z+\frac{9z-1}{17},$$
$$\frac{9z-1}{17}=t,$$
$$z=\frac{17t+1}{9}=2t+\frac{-t+1}{9},$$
$$\frac{-t+1}{9}=n,$$
$$t=1-9n,$$

значит,

$$z=2-18n+n=2-17n,$$

$$y = 6 - 51n + 1 - 9n = 7 - 60n,$$

$$x = 2 - 17n + 7 - 60n = 9 - 77n,$$

где n — любое целое число.

13. Даны четыре натуральных числа a, b, c, d, таких, что $a > b > c > d$.

1°. Доказать, что наибольший общий делитель $D(a, b, c, d)$ чисел a, b, c, d равен наибольшему общему делителю чисел a', b', c', d, где a', b', c' — соответственно остатки от деления чисел a, b, c на d.

2°. Приложить эту теорему для отыскания наибольшего общего делителя чисел

$$58\,212,\ 24\,948,\ 21\,924 \text{ и } 13\,608.$$

Решение. 1°. **Отыскание D (a, b, c, d).** Из соотношений

$$a = d\alpha + a', \qquad a' = a - d\alpha,$$

$$b = d\beta + b', \quad \text{или} \quad b' = b - d\beta,$$

$$c = d\gamma + c', \qquad c' = c - d\gamma$$

следует, что общий делитель чисел a, b, c, d является общим делителем чисел a', b', c', d и обратно.

Значит,

$$D(a, b, c, d) = D(a', b', c', d).$$

2°. Имеем

$$58\,212 = 13\,608 \cdot 4 + 3780,$$

$$24\,948 = 13\,608 \cdot 1 + 11\,340,$$

$$21\,924 = 13\,608 \cdot 1 + 8316.$$

Итак,

$$D(58\,212,\ 24\,948,\ 21\,924,\ 13\,608) =$$

$$= D(\ 3\,780,\ 11\,340,\ 8316,\ 13\,608).$$

Применяя доказанное в пункте 1°, еще раз получим

$$13\,608 = 3780 \cdot 3 + 2268,$$

$$11\,340 = 3780 \cdot 3,$$

$$8\,316 = 3780 \cdot 2 + 756.$$

Значит,

$$D(3780,\ 11\,340,\ 8316,\ 13\,608) =$$

$$= D(3780,\ 0{,}756,\ 2268) =$$

$$= D(3780,\ 756,\ 2268).$$

Наконец,

$$3780 = 756 \cdot 5,$$

$$2268 = 756 \cdot 3$$

и, значит,

$$D(3780,\ 756,\ 2268) = 756.$$

Окончательно: наибольший общий делитель данных чисел равен 756.

II. Задачи по арифметике (для самостоятельного решения)

1. Доказать, что если a и b — произвольные натуральные числа $(a>b)$ и a^5 и b^5 оканчиваются на одну и ту же цифру, то $a-b$ делится на 10, a^2-b^2 делится на 20.

2. Найти два целых положительных числа, зная, что их сумма делится на 3 и что разность их квадратов равна 48.

Ответ. $a=8$, $b=4$ или $a=13$, $b=11$.

3. Дано целое положительное число a. Существует ли целое положительное число x, такое, что $a+x^2$ является квадратом целого положительного числа?

Решить задачу в трех случаях:

$$1°\ a = 37;\ 2°\ a = 65;\ 3°\ a = 130.$$

Ответ. 1° $x=18$; 2° $x=32$, или $x=4$; 3° Нет решений.

4. Найти дробь $\frac{m}{n}$, равную дроби $\frac{156}{455}$, такую, что наибольший общий делитель D чисел m и n равен 5. Найти наименьшее общее кратное M чисел m и n.

Ответ. $\frac{60}{175}$, $D(60,\ 175) = 5$, $M(60,\ 175) = 2100$.

5. Найти дробь, равную дроби

$$\frac{143}{220},$$

такую, что наибольший общий делитель числителя и знаменателя равен 25. Чему в таком случае равно наименьшее общее кратное числителя и знаменателя?

Ответ. $\frac{425}{500}$; 6500.

6. Найти правильную дробь $\frac{m}{n}$ (m и n — натуральные числа и $m<n$), зная, что наибольший общий делитель m и n равен 12 и что $mn=5040$.

Ответ. $\frac{12}{420}\left(=\frac{1}{35}\right)$ и $\frac{60}{84}\left(=\frac{5}{7}\right)$.

7. Найти два натуральных числа, зная, что их наибольший общий делитель равен 17, а разность квадратов равна 1445.

Ответ. 51 и 34.

8. 1°. Найти все общие делители чисел 4512 и 4128.

2°. Найти натуральное число n, такое, что если на него разделить числа 4525 и 4147, то в остатке получатся 13 и 19.

Ответ. 1°. 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, 96.
2°. $n = 24$, $n = 32$, $n = 48$ и $n = 96$.

9. Дана дробь

$$\frac{n^2+1}{n(n^2-1)},$$

где n — натуральное число, бóльшее 1. Доказать, что общий делитель числителя и знаменателя является общим делителем чисел n^2-1 и 2 и обратно. Вывести отсюда, что если n — четное, то дробь несократима, если n — нечетное, то наибольший общий делитель числителя и знаменателя равен 2.

10. Обозначим через α и β два натуральных числа, а через d — общий делитель чисел $\alpha+\beta$ и $\alpha\beta$.

1°. Доказать, что d является также общим делителем чисел α^2 и β^2.

2°. Вывести из пункта 1°, что если α и β взаимно простые, то $\alpha+\beta$ и $\alpha\beta$ также взаимно простые.

3°. Пусть a и b — два натуральных числа, Δ — их наибольший общий делитель, m — их наименьшее общее кратное.

Доказать, что два числа $\frac{a+b}{\Delta}$ и $\frac{m}{\Delta}$ взаимно простые. Какой вывод отсюда можно сделать относительно наибольшего общего делителя чисел $a+b$ и m?

4°. Найти два натуральных числа a и b, зная их сумму 2704 и наименьшее общее кратное 106 848.

Ответ. 3°. Наибольший общий делитель чисел $a+b$ и m равен наибольшему общему делителю чисел a и b:

$$D(a+b,\ m) = D(a,\ b).$$

4°. $a=1008$, $b=1696$.

11. Доказать

$$\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=4.$$

12. $\sqrt[3]{38+17\sqrt{5}}=\sqrt{9+4\sqrt{5}}$.

13. $$\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}=\sqrt{2}.$$

Указание. Решение упрощается, если учесть, что

$$4 \pm 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} \pm 1)^2.$$

Уничтожить иррациональность в знаменателе:

14. $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$; $\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}$; $\dfrac{1}{1-\sqrt[4]{2}+\sqrt{2}}$.

15. $\dfrac{A}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}$.

16. Как геометрически интерпретируются сумма z_1+z_2 и разность z_1-z_2 двух комплексных чисел z_1 и z_2? Какой геометрический смысл имеет $|z_1-z_2|$?

17. Привести к тригонометрической форме число

$$z = -\cos\theta - i\sin\theta.$$

Ответ: $\cos(\theta+\pi)+i\sin(\theta+\pi)$.

18. Привести к тригонометрической форме число

$$z = 2+\sqrt{3}+i.$$

Ответ. $2\sqrt{2+\sqrt{3}}\left(\cos\dfrac{\pi}{12}+i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)$.

19. Комплексные числа z удовлетворяют условию $|z|=1$. Где расположены точки, изображающие эти числа z?

20. Комплексные числа z удовлетворяют условию $\arg z = \dfrac{\pi}{4}$. Где расположены точки, изображающие эти числа z?

21. Комплексные числа z удовлетворяют условию $\arg z = \dfrac{\pi}{2}$. Где расположены точки, изображающие эти числа z?

22. Комплексные числа z удовлетворяют условию $|z+1-i| = \sqrt{2}$. Где расположены точки, изображающие эти числа z?

23. Комплексные числа z удовлетворяют условию $\arg z = -\dfrac{\pi}{2}$. Где расположены точки, изображающие эти числа z?

24. Комплексные числа z удовлетворяют условию $|z-i| = |z+2|$. Где расположены точки, изображающие эти числа z?

25. Комплексные числа z удовлетворяют условию $|z+i| \leqslant |z-2|$. Где расположены точки, изображающие эти числа z?

26. Комплексные числа z удовлетворяют условию $|z+1+i| \leqslant 3$. Где расположены точки, изображающие эти числа z?

27. Найти тригонометрическую форму следующих комплексных чисел: а) $1+\cos 40^\circ+i\sin 40^\circ$; б) $1-\cos 40^\circ+i\sin 40^\circ$.

28. Как расположены точки, изображающие корни четвертой степени из единицы?

29. Начертить точки, соответствующие числам $2-i$, $3(\cos\varphi+i\sin\varphi)$.

30. Найти геометрические места точек на комплексной плоскости, соответствующих комплексным числам, которые удовлетворяют равенствам: а) $|z|=R$, где R — данное вещественное число, б) $\arg z=\varphi$, где φ — данный угол, в) $\arg(z-z_1)=\varphi$, где φ — данный угол и z_1 — данное комплексное число.

Указание к задаче «в». Обозначив $z-z_1=z'$, найти геометрическое место точек z', а затем найти $z=z'+z_1$, складывая z' и z_1, как векторы.

31. Записать число $-1-i$ в тригонометрической форме. Вычислить все три значения $\sqrt[3]{-1-i}$.

Ответ. $\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$. Значения $\sqrt[3]{-1-i}$:

$$\frac{\sqrt[4]{4}}{4}[\sqrt{3}-1+i(\sqrt{3}+1)],\ \frac{\sqrt[4]{4}}{4}[-\sqrt{3}-1+i(1-\sqrt{3})],$$

$$\frac{\sqrt[4]{4}}{2}(1-i).$$

32. Среди комплексных чисел z, удовлетворяющих условию

$$|z+3i|\leqslant 1,$$

найти число, имеющее наименьший аргумент φ; $0\leqslant\varphi<2\pi$.

III. Модуль, или абсолютная величина. Графики функций, связанных с понятием модуля (задачи для самостоятельного решения)

Построить графики следующих функций.

1. $y=|2x-3|+|x+4|$,
2. $y=|x-1|-|x+2|$,
3. $y=x+|x-1|$,
4. $y=|3-x^2|$,
5. $y=|x^2+2x+3|-1$,
6. $y=|x^2-2x-3|+x^2+2x$,
7. $y=2^{|x|}$,
8. $y=|\log_{\frac{1}{2}}x|$,
9. $y=\log_{\frac{1}{2}}|x|$,
10. $y=|\log_{\frac{1}{2}}|x||$,
11. $y=|\log_5 x|$,
12. $y=|\log_5|x||$.
13. $y=\left|\,||x|-1|-\frac{1}{2}\,\right|$
14. $y=|\sin x|$,
15. $y=|\cos x|$.

IV. Квадратные уравнения и уравнения, приводящиеся к квадратным (задачи с решениями)

1. Найти все значения m, при которых уравнение

$$x^2 - 2\sqrt{2}x + m + 1 = 0 \qquad (1)$$

имеет действительные и различные корни.

Определить, сколько корней этого уравнения находится в интервале $(0, \sqrt{2})$ в зависимости от m.

Решение.

$$\Delta = (\sqrt{2})^2 - (m+1) = 1 - m.$$

Корни x_1 и x_2 будут действительные и различные ($x_1 < x_2$) тогда и только тогда, когда

$$m < 1.$$

Пусть это условие выполнено, тогда один из корней данного уравнения больше, а другой меньше $\sqrt{2}$, так как сумма их равна $2\sqrt{2}$.

Итак,

$$x_1 < \sqrt{2} < x_2.$$

Значит, в интервал $(0, \sqrt{2})$ может попасть только один меньший корень. Ясно, что x_1 находится в интервале $(0; \sqrt{2})$, если он положителен, т. е. одного знака с x_2.

Но так как

$$x_1 + x_2 = 2\sqrt{2} > 0,$$

$$x_1 x_2 = m + 1,$$

то оба корня x_1 и x_2 положительны тогда и только тогда, когда $m+1>0$, т. е. $m > -1$.

Таким образом, в интервале $(0; \sqrt{2})$ может находиться только один корень x_1 уравнения (1); все значения m, при которых это будет иметь место, образуют интервал

$$-1 < m < 1.$$

Корень x_1, попадающий в интервал $(0, \sqrt{2})$, является меньшим корнем уравнения (1):

$$x_1 = \sqrt{2} - \sqrt{1-m}.$$

2. Найти все значения α из сегмента $[0, 2\pi]$, при которых корни уравнения $x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 + 2\sin\alpha = 0$ действительны и различны.

Определить, сколько корней этого уравнения находится в интервале $(0, \sqrt{2})$ в зависимости от значений α, лежащих на сегменте $[0, 2\pi]$.

Р е ш е н и е. На основании предыдущей задачи в интервале $(0, \sqrt{2})$ будет находиться не более одного корня данного уравнения. Все значения α, при которых в этот интервал попадает один корень, удовлетворяют неравенствам

$$-1 < 2\sin\alpha < 1.$$

Отсюда $0 \leqslant \alpha < \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} < \alpha < \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} < \alpha \leqslant 2\pi.$

Этот корень $x_1 = \sqrt{2} - \sqrt{1 - 2\sin\alpha}$.

3. 1°. Решить и исследовать уравнение

$$2u^2(1-\cos t) - 2u\sin t + 1 = 0.$$

Вычислить в зависимости от значения $\sin\frac{t}{2}$ модуль и аргумент каждого из корней.

2°. Во всем последующем предполагается, что t принадлежит интервалу $0<t<2\pi$. Обозначим через u' тот из корней данного уравнения, который имеет аргумент $\frac{t}{2}$. Вычислить $z=u'^2$ — квадрат этого корня и придать этому выражению вид $x+iy$ (x и y действительны). Пусть r — модуль z, а θ — аргумент z. Доказать, что $r=x+\frac{1}{2}$.

3°. Будем рассматривать t как время. Рассмотрим движущуюся точку $m(x, y)$, являющуюся изображением комплексного числа z. Какова будет траектория (T) движущейся точки m? В какой момент времени точка $m(x, y)$ будет занимать положение, для которого $x=\frac{1}{2}$? Составить уравнение траектории (T).

Р е ш е н и е. 1°. Вычисляем дискриминант данного уравнения:

$$\delta = \sin^2 t - 2(1-\cos t) = -4\sin^4\frac{t}{2}.$$

Если $\cos t=1$, т. е. $t=2k\pi$, где k принимает все целые значения, то в данном уравнении коэффициенты при u^2 и u обращаются в нуль, но свободный член $1\neq 0$ — уравнение не имеет корней. Если же $\cos t\neq 1$, то $\sin\frac{t}{2}\neq 0$; решая данное уравнение, будем иметь

$$u = \frac{\sin t \pm 2i\sin^2\frac{t}{2}}{2(1-\cos t)} = \frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2} \pm 2i\sin^2\frac{t}{2}}{4\sin^2\frac{t}{2}} = \frac{\cos\frac{t}{2} \pm i\sin\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}}.$$

Модуль и аргумент каждого решения. Рассмотрим два случая:

а) $\sin\frac{t}{2} > 0$. Тогда оба корня имеют модуль

$$\rho = \frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}.$$

Один из корней:

$$u' = \frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}\left(\cos\frac{t}{2} + i\sin\frac{t}{2}\right)$$

имеет аргумент

$$\frac{t}{2} + 2k\pi,$$

где k принимает все целые значения.

Другой корень u'', который мы перепишем в виде

$$u'' = \frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}\left[\cos\left(-\frac{t}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{t}{2}\right)\right],$$

имеет аргумент

$$-\frac{t}{2} + 2k\pi,$$

где k принимает все целые значения.

б) $\sin\frac{t}{2} < 0$. В этом случае оба корня имеют модуль, равный

$$\rho = -\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}.$$

Переписывая первый корень в виде

$$u' = -\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}\left[\cos\left(\frac{t}{2} + \pi\right) + i\sin\left(\frac{t}{2} + \pi\right)\right],$$

заключаем, что аргумент u':

$$\frac{t}{2} + \pi + 2k\pi,$$

где k принимает все целые значения.

Второй корень

$$u'' = -\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}\left[\cos\left(\pi-\frac{t}{2}\right)+i\sin\left(\pi-\frac{t}{2}\right)\right]$$

имеет аргумент

$$\pi-\frac{t}{2}+2k\pi,$$

где k принимает все целые значения.

2°. **Случай $0<t<2\pi$.** В этом случае $0<\frac{t}{2}<\pi$, значит, $\sin\frac{t}{2}>0$. Корень данного уравнения, имеющий аргумент $\frac{t}{2}$, таков:

$$u' = \frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}\left(\cos\frac{t}{2}+i\sin\frac{t}{2}\right).$$

Отсюда

$$z = u'^2 = \frac{1}{4\sin^2\frac{t}{2}}(\cos t + i\sin t),$$

следовательно,

$$r = |z| = \frac{1}{4\sin^2\frac{t}{2}},\quad \arg z = t.$$

Перепишем выражение для z в следующем виде:

$$z = \frac{\cos t}{4\sin^2\frac{t}{2}} + i\,\frac{\sin t}{4\sin^2\frac{t}{2}}.$$

Действительная часть числа z:

$$x = \frac{\cos t}{4\sin^2\frac{t}{2}} = \frac{1-2\sin^2\frac{t}{2}}{4\sin^2\frac{t}{2}} = \frac{1}{4\sin^2\frac{t}{2}} - \frac{1}{2} = r - \frac{1}{2}.$$

Отсюда

$$r = x + \frac{1}{2}.$$

3°. **Траектория (T) точки m.** Так как $r = \sqrt{x^2+y^2}$ и $r = x + \frac{1}{2}$, то $\sqrt{x^2+y^2} = x + \frac{1}{2}$.

Возводя в квадрат обе части этого уравнения, получим

$$x^2 + y^2 = x^2 + x + \frac{1}{4},$$

или

$$y^2 = x + \frac{1}{4},$$

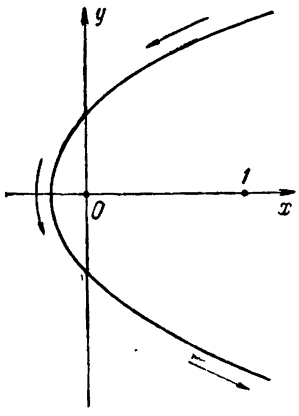

Рис. 68

это уравнение параболы (рис. 68). Важно отметить, что, производя выкладки в обратном порядке, получим

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \left| x + \frac{1}{2} \right|.$$

Но так как

$$x + \frac{1}{2} = r \geqslant 0,$$

то знак модуля можно опустить и получим

$$\sqrt{x^2 + y^2} = x + \frac{1}{2}.$$

С другой стороны, ясно, что при изменении t от 0 до 2π точка $m(x, y)$ опишет *всю* параболу $y^2 = x + \frac{1}{4}$ («против часовой стрелки»). Таким образом, траектория (T) точки $m(x, y)$ — *вся* парабола $y^2 = x + \frac{1}{4}$.

V. Квадратные уравнения и уравнения, приводящиеся к квадратным (задачи для самостоятельного решения)

1. Дано квадратное уравнение

$$(m - 1)x^2 - (2m - 1)x + m + 5 = 0.$$

1°. Найти все значения m, при которых это уравнение имеет действительные корни x_1 и x_2.

2°. Предполагая, что m — *любое* действительное число, не равное единице, найти такое число a, чтобы произведение $(x_1 - a)(x_2 - a)$ не зависело от m.

Ответ. 1°. $m \leqslant \frac{21}{20}$.

2°. Указание. Дробно-линейная функция $y = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$ не зависит от x

тогда и только тогда, когда $\alpha\delta-\beta\gamma=0$.

Ответ. $a=6$.

2. Не решая уравнение

$$f(x)=(x-1)(x-2)+(x-2)(x+1)+(x+1)(x-1),$$

определить расположение корней этого уравнения относительно -1, 1 и 2.

Указание. $f(-1)=6$, $f(1)=-2$, $f(2)=3$, следовательно, $-1<x_1<1<x_2<2$.

3. Решить уравнение

$$7^{2x}-4m\cdot 7^x+2m+2=0.$$

Ответ. 1) Если $m<-1$, то уравнение имеет один корень:

$$x=\log_7(2m+\sqrt{4m^2-2m-2}).$$

2) Если $-1\leqslant m<1$, то уравнение корней не имеет.

3) Если $m>1$, то уравнение имеет два корня:

$$x_{1,2}=\log_7(2m\pm\sqrt{4m^2-2m-2}).$$

При $m=1$ уравнение имеет один корень:

$$x=\log_7 2.$$

4. Найти все значения m, при которых корни x_1 и x_2 уравнения

$$mx^2-(m-1)x+2m-1=0, \text{ где } m\neq 0,$$

действительны и различны; предполагая, что m принимает только такие значения, найти m, при котором $x_1^2+x_2^2=4$.

Ответ. $\frac{1-2\sqrt{2}}{7}<m<\frac{1+2\sqrt{2}}{7}$, $x_1^2+x_2^2=4$ только при $m=-\frac{1}{\sqrt{7}}$ (x_1 и x_2 предполагаются действительными).

5. Найти все значения m, при которых уравнение

$$3mx^2-(7m+1)x+2m+1=0 \qquad (1)$$

имеет действительные корни. Исследовать знаки корней.

Ответ. Если $m<-\frac{1}{2}$, уравнение имеет два положительных действительных корня x_1 и x_2 (которые мы получим, решив квадратное уравнение (1)). При $m=-\frac{1}{2}$ корни таковы: $x_1=0$, $x_2=\frac{5}{3}$. Если $-\frac{1}{2}<m<0$, уравнение имеет два действительных корня разных знаков. Если $m=0$, уравнение имеет один корень $x=1$. Если $m>0$, то уравнение имеет два положительных корня.

6. Решить уравнение

$$(1-m)\sin^2 x - 2(m+1)\cos x + 3m + 4 = 0,$$

где m — действительный параметр.

Ответ. 1°. Если $m<-3$, уравнение не имеет решений.

2°. Если $m=-3$, то $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$.

3°. Если $-3<m<-2$, то

$$x = 2k\pi \pm \arccos\frac{m+1\pm\sqrt{-m^2-m+6}}{m-1}.$$

4°. Если $m=-2$, то $x = 2k\pi \pm \arccos\frac{1}{3}$.

5°. Если $-2<m\leqslant -\frac{6}{5}$, то

$$x = 2k\pi \pm \arccos\frac{m+1-\sqrt{-m^2-m+6}}{m-1}.$$

6°. Если $m>-\frac{6}{5}$, то уравнение не имеет решений.

7. 1°. Дано квадратное уравнение

$$mx^2 + 2x - 2m = 0, \qquad (1)$$

в котором m — действительный параметр, причем $m\neq 0$. Найти все значения m, при которых уравнение (1) имеет и притом только один корень, заключенный между -1 и 1.

2°. Дано уравнение

$$m\cos 2x + 4\cos x - 3m = 0, \qquad (2)$$

в котором m — действительный параметр, а x — неизвестное. Найти все значения m, при которых уравнение (2) имеет и притом только один корень, заключенный в интервале $(0, \pi)$?

3°. При каком значении m уравнение (2) имеет корень $\frac{2\pi}{3}$?

Ответ. 1°. $-2<m<2$. 2°. $-2<m<2$. 3°. $m=-\frac{4}{7}$.

8. Дано квадратное уравнение

$$(m-1)x^2 - 2mx + 2m + 3 = 0, \quad m\neq 1.$$

Найти все значения m, при которых один из корней этого уравнения будет меньше 1, а другой больше 1, но меньше 2.

Ответ. $-2<m<\frac{1}{2}$.

9. Решить уравнение

$$25^x - (m+1)5^x + 2(m-1) = 0,$$

где m — действительный параметр, а x — неизвестное. Рассмотреть случай $m=0$.

Ответ. Если $m>1$, то уравнение имеет два корня: $x_1=\log_5(m-1)$ и $x_2=\log_5 2$ (при $m=3$ эти корни равны между собой). Если $m\leqslant 1$, то уравнение имеет один корень $x=\log_5 2$.

10. 1°. Составить квадратное уравнение, корни которого $x'=m+3$, $x''=x'^2-6x'+10$, где m — действительный параметр.

2°. При каком условии полученное уравнение

а) имеет равные корни;

б) имеет корни x' и x'', такие, что $x''=-x'$;

3°. имеет корень, равный нулю.

Ограничиться действительными корнями.

Ответ. 1°. $x^2-(m^2+m+4)x+(m+3)(m^2+1)=0$.
2°. а) $m=-1$, $x'=x''=2$; $m=2$, $x'=x''=5$; б) $x'+x''\neq 0$.
3°. $m=-3$, $x'=0$, $x''=10$.

11. Найти все значения a, при которых корни уравнения

$$(a-2)x^2-2ax+2a-3=0$$

действительны. Определить знаки корней.

12. Доказать, что корни уравнения

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{x-1}=1,$$

где a и b — вещественные числа и $a^2+b^2\neq 0$, действительны и различны.

13. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2-ax+a-1=0$, где a — вещественное число. Найти значение a, при котором величина $x_1^2+x_2^2$ будет наименьшей.

Указание. Выразить $x_1^2+x_2^2$ через коэффициенты трехчлена, пользуясь теоремой Виета, и найти минимум квадратного трехчлена относительно a:

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2.$$

14. Доказать, что если x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2-cx-c=0$, где c — действительное число, не равное нулю, то $x_1^3+x_2^3-x_1^3x_2^3>0$.

15. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2+px+q=0$. Выразить через p и q следующие выражения:

$$x_1^2+x_2^2;\ x_1^3+x_2^3;\ x_1^4+x_2^4;\ x_1^5+x_2^5;\ \frac{1}{x_1^3}+\frac{1}{x_2^3}.$$

Указание. Каждое из этих выражений нужно выразить через x_1+x_2 и x_1x_2.

16. Найти все решения уравнений $x^6+5x^3-24=0$ и $x^6+(c-b)x^3-bc=0$, где b и c — действительные числа.

17. Числа α и β ($\alpha\neq\beta$) являются корнями уравнения

$$x^3+px+q=0$$

и удовлетворяют равенству $\alpha\beta+\alpha+\beta=0$. Найти соотношение между p и q и выразить третий корень через α и β.

18. Решить уравнение

$$17^{3x+1}-2\sqrt{17^{4x+2}}+17^{x+1}=0.$$

Ответ. $x=0$.

19. Решить уравнение

$$(x+a)^4+(x-a)^4=b,$$

где a и b — действительные параметры.

VI. Системы рациональных уравнений (задачи для самостоятельного решения)

1. Исследовать систему уравнений

$$\begin{aligned} ax-by&=0,\\ a^2x-by&=ab. \end{aligned}$$

2. Исследовать систему уравнений

$$\begin{aligned} ax-y&=b,\\ x-ay&=b. \end{aligned}$$

Решить систему уравнений

3. $x+y=a,\ x^4+y^4=a^4.$

4. $xy+xz=a^2,\ yz+yx=b^2,\ zx+zy=c^2.$

5. $x^2+xy+4xz-4z^2=0,\ y^2+xy+4yz-8z^2=0,\ xyz=8.$

6. $(x+y)^2-z^2=4,\ (y+z)^2-x^2=2,\ (z+x)^2-y^2=3.$

7. $x^3y+y^3x=\frac{10}{9}(x+y)^2,\ x^4y+y^4x=\frac{2}{3}(x+y)^3.$

8. $xy+24=\frac{x^3}{y},\ xy-6=\frac{y^3}{x}.$

9. $2x^2+y^2+z^2=9+yz,\ x^2+2y^2+z^2=6+zx,\ x^2+y^2+2z^2=3+xy.$

10. $x+y+z=1,\ xy+yz+zx=-4,\ x^3+y^3+z^3=1.$

11. $xyz+xz^2=2,\ xy+2xz=-z,\ x^2yz=-15.$

12. $\dfrac{xy}{x+2y}+\dfrac{x+2y}{xy}=2,$
$\dfrac{xy}{x-2y}+\dfrac{x-2y}{xy}=4.$

13. $x^2+2yz=1,$
$y^2-2zx=2,$
$z^2+2xy=1.$

14. $(x+y)(x+z)=x,$
$(y+z)(y+x)=y,$
$(z+x)(z+y)=z.$

15. $(x^3+1)(y^3+1)=18,$
$xy+x+y=5.$

16. $x+y=z,$
$y^2+z^2=13x^2,$
$2(x^3+z^3)=7y^3.$

17. $x-2y+3z=9,$
$x^2+4y^2+9z^2=189,$
$3xz=4y^2.$

18. $x+y=1,$
$xz+yt=2,$
$xz^2+yt^2=5,$
$xz^3+yt^3=14.$

19. $x^4+y^4=17(x+y)^2,$
$xy=2(x+y).$

20. $x^2+y^2=x+y,$
$x^4+y^4=\dfrac{1}{2}(x+y)^2.$

21.
$x^2+5y^2+4z^2+4xy+4yz=125,$
$x^2+3y^2-4z^2+4xy-4yz=75,$
$x+y+z=8.$

22. 1°. Найти действительные решения системы

$$x^6-15x^4y^2+15x^2y^4-y^6=0, \qquad (1)$$

$$6x^5y-20x^3y^3+6xy^5=0. \qquad (2)$$

Доказать, что решение системы (1), (2) равносильно решению уравнения

$$z^6=1,$$

где $z=x+yi$.

Указание. $2xy(3x^4-10x^2y^2+3y^4)=2xy(x^2-3y^2)(3x^2-y^2)=$

$$=2xy(x+y\sqrt{3})(x-y\sqrt{3})(x\sqrt{3}+y)(x\sqrt{3}-y).$$

Ответ. Шесть решений: $(1, 0)$, $(-1, 0)$, $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,

$$\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

23. Найти значения a, при которых система

$$x^2+y^2+2x\leqslant 1,$$
$$x-y+a=0$$

имеет единственное действительное решение.

Ответ. 1) $a=3$, при этом $x=-2$, $y=1$; 2) $a=-1$, при этом $x=0$, $y=-1$.

VII. Иррациональные уравнения и системы (задачи для самостоятельного решения)

1. Решить уравнение

$$\sqrt{x-2+\sqrt{2x-5}}+\sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}}=7\sqrt{2}.$$

Ответ. $x=15$.

2. Решить уравнение

$$\sqrt{x-a}+x=0,$$

где a — действительный параметр.

Ответ. Если $a<0$, то $x=\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2}$.

Если $a=0$, то $x=0$. Если $a>0$, то уравнение не имеет корней.

3. Решить уравнение

$$\sqrt{x|x-1|}=m,$$

где m — действительный параметр.

Ответ. Если $m<0$, то уравнение не имеет корней. Если $0\leqslant m\leqslant\frac{1}{2}$, то уравнение имеет три корня: два из них — это корни уравнения

$$x^2-x+m^2=0,$$

третий — это положительный корень уравнения

$$x^2-x-m^2=0.$$

Если $m>\frac{1}{2}$, то уравнение имеет только один корень — это положительный корень уравнения

$$x^2-x-m^2=0.$$

4. Решить уравнение

$$\sqrt{x^2-2ax}=b-x,$$

где a и b — действительные параметры.

Ответ. 1) Если $b>0$, $\frac{b}{2}<a\leqslant b$ или $b<0$, a не входит в полуинтервал $\left(b,\ \frac{b}{2}\right]$, то решений нет.

2) Если $a=b=0$, то решением является любое неположительное число x.

3) Если $a \neq b = 0$ или $b > 0$, a не входит в полуинтервал $\left(\frac{b}{2}, b\right]$ или, наконец, если $b < 0, b < a \leqslant \frac{b}{2}$, то уравнение имеет единственный корень

$$x = \frac{b^2}{2(b-a)}.$$

5. Решить систему уравнений

$$\sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{2xy} = 2\sqrt{2},$$
$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2.$$

6. Решить систему уравнений

$$\sqrt{\frac{x+y}{x-y}} + \sqrt{\frac{x-y}{x+y}} = \frac{5}{2},$$
$$x^2 + y^2 = 34.$$

VIII. Неравенства (задачи с решениями)

1. Доказать, что

1° Если $x + y = a$, то $x^2 + y^2 \geqslant \frac{a^2}{2}$,

2° Если $x + y + z = a$, то $x^2 + y^2 + z^2 \geqslant \frac{a^2}{3}$.

3°. Обобщить.

Решение. 1°. $(x+y)^2 + (x-y)^2 = 2(x^2+y^2)$.

Отсюда

$$x^2 + y^2 \leqslant \frac{(x+y)^2}{2} = \frac{a^2}{2},$$

причем знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда $x - y = 0$, т. е. при $x = y = \frac{a}{2}$.

2°. $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{3}[(x+y+z)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 + (x-y)^2]$.

Отсюда

$$x^2 + y^2 + z^2 \geqslant \frac{(x+y+z)^2}{3} = \frac{a^2}{3},$$

причем знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда

$$x = y = z = \frac{a}{3}.$$

3°. Первое обобщение. Пусть

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = a.$$

Из тождества $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2=\frac{1}{n}[(x_1+x_2+\ldots+x_n)^2+$

$+(x_1-x_2)^2+(x_1-x_3)^2+\ldots+(x_1-x_n)^2+(x_2-x_3)^2+$

$+(x_2-x_4)^2+\ldots+(x_2-x_n)^2+\ldots+(x_{n-1}-x_n)^2]$

находим

$$x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2\geqslant\frac{a^2}{n},$$

причем знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда

$$x_1=x_2=\ldots=x_n=\frac{a}{n}.$$

Второе обобщение (из тождеств Лагранжа).

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(ax+by)^2+(ay-bx)^2,$$

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)=(ax+by+cz)^2+$$

$$+(bx-ay)^2+(cy-bz)^2+(az-cx)^2$$

и вообще

$$(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)=(a_1x_1+a_2x_2+\ldots a_nx_n)^2+$$

$$+(a_2x_1-a_1x_2)^2+(a_3x_1-a_1x_3)^2+\ldots+(a_nx_1-a_1x_n)^2+$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+(a_nx_{n-1}-a_{n-1}x_n)^2$$

следует, что если

$$ax+by=c,\text{ то }x^2+y^2\geqslant\frac{c^2}{a^2+b^2};$$

если

$$ax+by+cz=d,$$

то

$$x^2+y^2+z^2\geqslant\frac{d^2}{a^2+b^2+c^2}$$

и вообще, если

$$a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n=d,$$

го

$$x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2\geqslant\frac{d^2}{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2},$$

причем знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда

$$x_1:x_2:\ldots:x_n=a_1:a_2:\ldots:a_n.$$

Замечание. Полагая $a_1=a_2=\ldots=a_n=1$, получим то, что указано в первом обобщении.

2. Решить неравенство

$$\sqrt{1-x^2}<a-x,$$

где a — действительный параметр.

Решение. Уравнение $y=\sqrt{1-x^2}$ является уравнением полуокружности радиуса 1 с центром в начале координат, граничными точками которой являются точки $A(-1, 0)$, $B(0, 1)$, и которая проходит через точку $C(0, 1)$ (рис. 69).

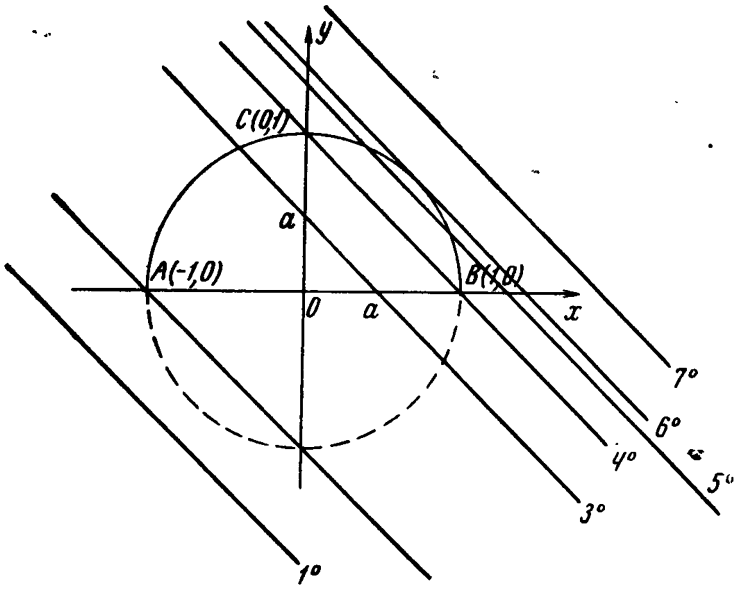

Рис. 69

Уравнение $y=a-x$ есть уравнение прямой, проходящей через точки $(a, 0)$ и $(0, a)$.

1°. Если $a<-1$, то неравенство решений не имеет.

2°. Если $a=-1$, то неравенство также решений не имеет.

3°. Если $-1<a<1$, то, решая совместно систему

$$y=\sqrt{1-x^2},\ y=a-x,$$

или

$$x^2+y^2=1,\ x+y=a,\ y\geqslant 0,$$

получим

$$\left.\begin{array}{c}(x+y)^2-2xy=1,\\ x+y=a,\\ y\geqslant 0;\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{c}xy=\dfrac{a^2-1}{2},\\ x+y=a,\\ y\geqslant 0;\end{array}\right\}$$

$$\lambda^2-a\lambda+\frac{a^2-1}{2}=0;$$

пусть λ — отрицательный корень этого уравнения, т. е.

$$\lambda=\frac{a-\sqrt{2-a^2}}{2}.$$

Все решения неравенства в этом случае (3°):

$$-1\leqslant x<\frac{a-\sqrt{2-a^2}}{2}.$$

4°. Если $a=1$, то все решения неравенства

$$-1\leqslant x<1.$$

5°. Если $1<a<\sqrt{2}$, то прямая $y=a-x$ пересекает полуокружность $y=\sqrt{1-x^2}$ в двух точках, абсциссы которых $\frac{a\pm\sqrt{2-a^2}}{2}$. Все решения данного неравенства в этом случае:

$$-1\leqslant x<\frac{a-\sqrt{2-a^2}}{2},\ \frac{a+\sqrt{2-a^2}}{2}<x\leqslant 1.$$

6°. Если $a=\sqrt{2}$, то решением является любое число, кроме $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

7°. Если $a>\sqrt{2}$, то решением является любое число.

Замечание. Задача может быть решена и чисто аналитически.

IX. Неравенства (задачи для самостоятельного решения)

1. Решить неравенство

$$\sqrt{x-2}>x-4.$$

Ответ.

$$2\leqslant x<6.$$

2. Найти наименьшее значение функции

$$y=|x-a|+|x-b|+|x-c|+|x-d|,$$

где $a<b<c<d$. При каких значениях x эта функция принимает наименьшее значение?

Ответ. $y_{\min}=d+c-b-a$ при всех x, таких, что $b\leqslant x\leqslant c$.

3. Доказать, что если n — натуральное число, большее 1, то

$$\left(\frac{n+1}{3}\right)^n<n!<\left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$

4. Решить неравенство

$$\frac{x}{a}-\frac{1}{x}>\frac{1}{a},$$

где a — действительный параметр, не равный нулю.

5. Найти области определения функций:

1°. $y=\dfrac{x}{x^2-1}$,

2°. $y=\sqrt{x}+\sqrt{-x}$,

3°. $y=\sqrt{\lg\sin x}$

4°. $y=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}\sin x}$,

5°. $y=\sqrt[4]{\dfrac{(x-2)(x+3)}{x^2}}$,

6°. $y=\lg\lg^2\lg x$,

7°. $\sqrt{\cos(\sin x)-\sin(\cos x)}$.

Ответ: $-\infty<x<+\infty$.

6. Решить неравенство

$$-\frac{1}{2x^2-11x+12}<-\frac{1}{2x^2-9x+7}.$$

7. Решить неравенство

$$\sqrt{a^2-x^2}+2x>0,$$

где a — действительный параметр.

X. Графики функций (задачи с решениями)

1. Исследовать функцию

$$y=8x^4-8x^2+1$$

на сегменте $[-1, 1]$ и построить ее график.

1°. Доказать, что эта функция возрастающая на сегментах $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right]$ и $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$ и убывающая на сегментах $\left[-1,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ и $\left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$. Найти ее наибольшее и наименьшее значения на этом сегменте. Построить ее график.

Решение. Полагая $x = \cos z$, получим

$$8\cos^4 z - 8\cos^2 z + 1 = \cos 4z.$$

Считая, что $0 \leqslant z \leqslant \pi$, заключаем: $0 \leqslant 4z \leqslant 4\pi$.

Функция $y = \cos 4z$ при изменении z на сегменте $0 \leqslant z \leqslant \pi$ обладает следующими свойствами: на сегменте $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, она убывает от 1 до -1, иначе ($x = \cos z$) на сегменте $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$ она возрастает от -1 до 1 и т. д.

Из выражения $y = \cos 4z$ ясно также, что наименьшее значение этой функции равно -1 (и оно достигается на сегменте $0 \leqslant z \leqslant \pi$ два раза) а наибольшее ее значение равно 1 (рис. 70).

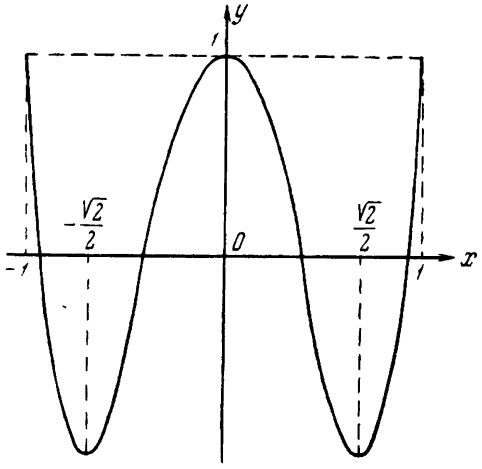

Рис. 70

Сегменты, на которых возрастает и убывает данная функция, можно найти и иначе: полагая $x^2 = u$, получим

$$y = 8u^2 - 8u + 1,$$

причем в силу того, что $-1 \leqslant x \leqslant 1$, имеем $0 \leqslant u \leqslant 1$.

Функция $y = 8u^2 - 8u + 1$ убывает в полуинтервале $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$ и возрастает в полуинтервале $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$. Но так как значения u ограничены $0 \leqslant u \leqslant 1$, то ограничимся следующими выводами: функция

$$y = 8u^2 - 8u + 1$$

убывает на сегменте $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ и возрастает на сегменте $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Так как $u = x^2$ и на сегменте $[-1, 0]$ функция $u = x^2$ — убывающая,

а на сегменте [0, 1] — возрастающая, то мы приходим к тем же выводам.

2. Исследовать функцию

$$y = \frac{2x+p}{x+p+1}$$

(p — параметр) на возрастание и убывание.

Р е ш е н и е. Поделив числитель на знаменатель, преобразуем y к виду

$$y = 2 - \frac{p+2}{x+p+1}.$$

Эта функция определена при всех значениях $x \neq -p-1$. В каждом из интервалов $(-\infty, -p-1)$ и $(-p-1, +\infty)$ функция $x+p+1$ возрастающая, а $\frac{1}{x+p+1}$ убывающая. Значит, если $p > -2$, то данная функция возрастающая в каждом из интервалов $(-\infty, -p-1)$, $(-p-1, +\infty)$, а если $p < -2$, то убывающая. При $p = -2$ $y = 2$ при всех $x \neq 1$.

3. Рассмотрим следующий многочлен относительно x, коэффициенты которого являются функциями параметра m:

$$y = (m-1)x^2 + (2m-3)x - 3m + 2.$$

Для каждого значения $m \neq 1$ это уравнение является уравнением параболы, которую мы обозначим через Π_m.

1°. Найти m, если известно, что вершины всех парабол Π_m лежат на прямой $x = h$, параллельной оси Oy (h — данное число, не равное -1).

2°. Доказать, что все параболы Π_m проходят через две фиксированные точки.

3°. Доказать, исходя из результата 2°, что все параболы Π_m пересекают ось Ox в действительных точках. Доказать то же положение аналитически. Определить положение числа $\lambda = -1$ относительно корней уравнения $y = 0$ (y — данная функция).

О т в е т ы и у к а з а н и я.

1°. $m = \frac{2h+3}{2h+2}$.

2°. Перепишем данное уравнение так:

$$y + x^2 + 3x - 2 = m(x^2 + 2x - 3).$$

Для того чтобы это уравнение выполнялось при всех значениях m, необходимо и достаточно, чтобы x и y удовлетворяли уравнениям

$$x^2 + 2x - 3 = 0,$$

$$y + x^2 + 3x - 2 = 0$$

Решая эту систему, найдем две точки $P(-3, 2)$ и $Q(1, -2)$. Заметим, что при $m=1$ данное уравнение принимает вид $y=-x-1$, это уравнение прямой PQ.

3°. Так как ординаты точек P и Q имеют разные знаки, то все параболы Π_m (и прямая Π_1) пересекают ось Ox в действительных точках.

Аналитическое решение:

$$\Delta = (2m-3)^2 - 4(m-1)(-3m+2) = 16m^2 - 32m + 17 > 0$$

при всех действительных значениях m.

Переписывая уравнение $y=0$ в виде

$$x^2 + \frac{2m-3}{m-1}x + \frac{-3m+2}{m-1} = 0$$

и подставляя в левую часть $x=\lambda=-1$, получим число $-4<0$. Значит, число $\lambda=-1$ лежит между корнями любого из уравнений $y=0$ (независимо от m).

4. Дано уравнение $y=ax^2$ параболы (P) $(a>0)$. Проведем произвольную прямую (D), перпендикулярную оси параболы и пересекающую ось Oy в точке $B(0, b)$. Пусть M — переменная точка параболы, а (M) — окружность с центром M, касающаяся прямой (D).

1°. Доказать, что на оси параболы, т. е. в данном случае на оси Oy, существует точка K, обладающая следующим свойством: длина KS отрезка касательной, проведенной из точки K к окружности (M) (S — точка прикосновения), постоянна для всех окружностей (M).

2°. Как надо выбрать прямую (D) для того, чтобы все окружности (M) проходили через одну и ту же точку?

Решение. 1°. Возьмем на оси Oy пока произвольную точку K с координатами $x=0$, $y=k$. Тогда, обозначая координаты точки M через x и y, будем иметь (рис. 71).

$$KS^2 = KM^2 - MS^2 = KM^2 - MT^2 = x^2 + (y-k)^2 - (b-y)^2 =$$

$$= x^2 + 2(b-k)y + k^2 - b^2,$$

и так как $y=ax^2$, то

$$KS^2 = \frac{y}{a} + 2(b-k)y + k^2 - b^2 = \left(\frac{1}{a} + 2b - 2k\right)y + k^2 - b^2.$$

Это выражение не зависит от положения точки M на параболе тогда и только тогда, когда коэффициент при y равен нулю:

$$\frac{1}{a} + 2b - 2k = 0,$$

откуда

$$k = b + \frac{1}{2a}.$$

При этом

$$KS^2 = b^2 + \frac{b}{a} + \frac{1}{4a^2} - b^2 = \frac{1+4ab}{4a^2},$$

Отсюда следует, что задача возможна в случае

$$1 + 4ab > 0,$$

т. е. в случае

$$b > -\frac{1}{4a}$$

(во всяком случае для всех прямых (D), *пересекающих* параболу).

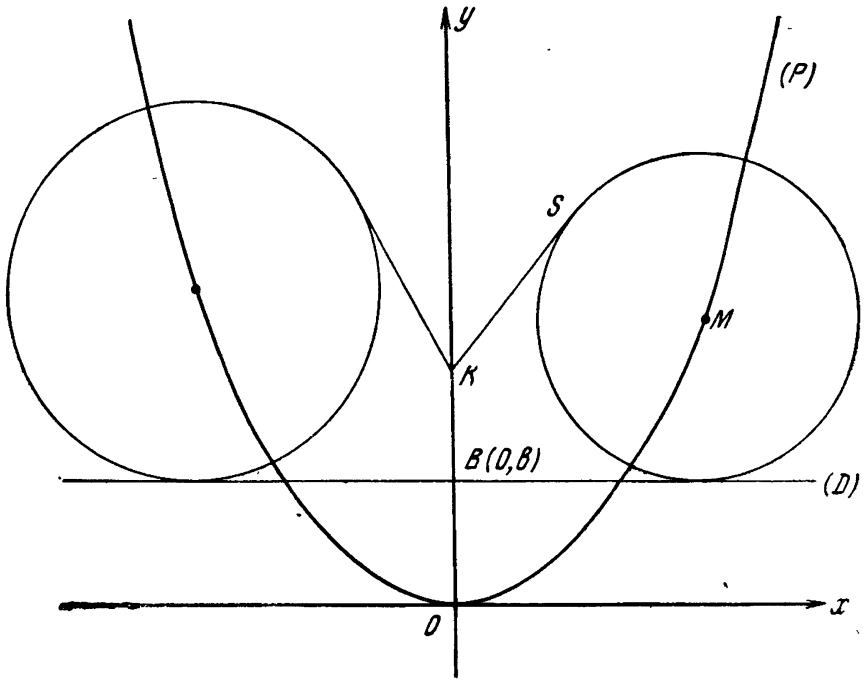

Рис. 71

2°. Для каждой окружности (M), обладающей тем свойством, что $KS^2 = \frac{1+4ab}{4a^2}$, существует ей симметричная относительно оси параболы, обладающая, конечно, тем же свойством. Поэтому если все окружности (M) проходят через одну и ту же точку, то она должна лежать на оси параболы. Пусть $C(0, c)$ — та фиксированная точка оси параболы, через которую проходят все окружности (M). Тогда.

$$MC = MT, \text{ или } MC^2 = MT^2,$$

или

$$x^2+(y-c)^2=(y-b)^2,$$

или, так как $y=ax^2$:

$$x^2(1-2ac+2ab)+c^2-b^2=0.$$

Это соотношение должно выполняться при всех значениях x, что возможно только в случае

$$1-2ac+2ab=0,\ c^2-b^2=0,$$

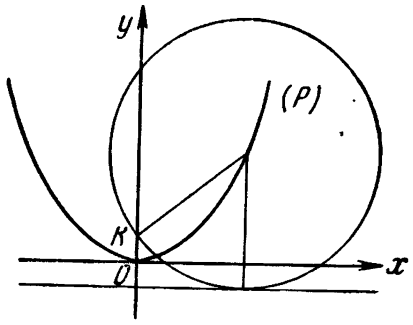

Рис. 72

или

$$2a(c-b)=1,\ (c+b)(c-b)=0.$$

Из первого соотношения следует, что $c-b\neq 0$, значит, $c+b=0$, и мы находим

$$-4ab=1,\ b=-\frac{1}{4a},\ c=\frac{1}{4a}.$$

Таким образом, если прямая (D) перпендикулярна оси параболы $y=ax^2$ и пересекает ее в точке $\left(0,\ -\frac{1}{4a}\right)$, то все окружности (M) проходят через точку $K\left(0,\ \frac{1}{4a}\right)$. В этом случае прямая (D) называется директрисой параболы, а точка K — фокусом параболы (рис. 72).

5. Доказать, что функция

$$y=\frac{x}{1+x^2}$$

в полуинтервалах $(-\infty,\ -1]$ и $[1,\ +\infty)$ убывающая, а на сегменте $[-1,\ 1]$ возрастающая.

Доказать, что в интервале $(-\infty,\ -\sqrt{3}]$ эта функция обладает следующим свойством: пусть x_1 и x_2 — любые числа из этого интервала $(x_1\neq x_2)$; тогда

$$\frac{\dfrac{x_1}{x_1^2+1}+\dfrac{x_2}{x_2^2+1}}{2}<\frac{\dfrac{x_1+x_2}{2}}{1+\dfrac{(x_1+x_2)^2}{4}}. \qquad (1)$$

Доказать, что тем же свойством эта функция обладает на сегменте $[0,\ \sqrt{3}]$. На сегменте же $[-\sqrt{3},\ 0]$ и на полусегменте

$[\sqrt{3}, +\infty)$ неравенство (1) заменяется на противоположное.

Дать всем этим фактам геометрическое истолкование и построить график функции

$$y = \frac{x}{1+x^2}.$$

6. Рассмотрим уравнение

$$2xu^2 - 2(x+y-3)u + y + 1 = 0, \qquad (1)$$

в котором u — неизвестное, а x и y — координаты переменной точки M плоскости.

1°. Для каких положений точки $M(x, y)$ уравнение (1) имеет только один простой (не кратный) корень?

2°. Построить линию, для всех точек которой и только для таких точек уравнение (1) имеет двойной корень.

Найти множество всех точек $M(x, y)$, для координат которых уравнение (1) имеет действительные и различные корни.

3°. Найти геометрическое место точек $M(x, y)$, для каждой из которых уравнение (1) имеет корень, равный нулю.

4°. Найти геометрическое место точек $M(x, y)$, для каждой из которых уравнение (1) имеет действительные корни противоположных знаков.

5°. Найти геометрическое место точек $M(x, y)$, лежащих в первой четверти ($x>0$, $y>0$), для каждой из которых уравнение (1) имеет действительные корни и исследовать знак этих корней в зависимости от положения точки M.

Решение. 1°. Уравнение (1) имеет только один простой корень, если коэффициент при u^2 равен нулю, но коэффициент при u не равен нулю, т. е.

$$x = 0, \quad y \neq 3;$$

значит, геометрическое место таких точек M состоит из всех точек оси Oy, кроме точки (0, 3).

2°. Приравнивая нулю дискриминант, получим

$$(x+y-3)^2 - 2x(y+1) = 0,$$

или

$$(x-4)^2 + (y-3)^2 = 4^2.$$

Это уравнение окружности (I) с центром в точке I (4,3) и радиусом $r=4$. Эта окружность касается оси Oy в точке $A(0, 3)$, которая должна быть исключена из множества всех точек M окружности (I), так как при $x=0$, $y=3$ уравнение (1) не имеет корней.

Для того чтобы уравнение (1) имело действительные и различные корни, необходимо и достаточно, чтобы дискриминант данно-

го уравнения был положителен (и было выполнено неравенство $x \neq 0$):

$$(x+y-3)^2-2x(y+1)>0,$$

или

$$(x-4)^2+(y-3)^2>4^2.$$

Геометрическим местом точек M являются все точки плоскости, лежащие вне окружности (I), за исключением всех точек оси Oy $(x \neq 0)$ (рис. 73).

3°. Геометрическое место точек $M(x, y)$, для которых данное уравнение имеет корень, равный нулю, определяется из условия $y+1=0$. Это прямая, параллельная оси Ox и пересекающая ось Oy в точке B $(0, -1)$ (точка B не исключается!).

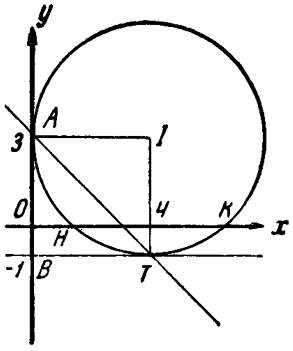

Рис. 73

4°. Сумма корней уравнения (1) равна нулю, если

$$x \neq 0,\ x+y-3=0.$$

Уравнение $x+y-3=0$ есть уравнение прямой AT, проходящей через точки $A(0, -3)$ и T $(3, 0)$. Но так как по условию корни должны быть действительны, то следует взять только часть этой прямой, лежащую вне окружности (I) (если точка M совпадает с точкой T $(3, 0)$, то уравнение имеет двойной корень, равный нулю).

5°. Геометрическим местом точки M являются все точки, лежащие в первой четверти и вне окружности (I). Произведение и сумма корней в этом случае таковы:

$$p=\frac{y+1}{2x},\quad s=\frac{x+y-3}{x}.$$

Так как по условию $x>0$, $y>0$, то $p>0$, значит, корни одинаковых знаков.

Выражение $s=\frac{x+y-3}{x}$ отрицательно или положительно, если соответственно $y<3-x$ или $y>3-x$. Но в случае $y<3-x$ точка $M(x, y)$ лежит ниже прямой AT, а в случае $y>3-x$ — выше ее. Значит, окончательно, геометрическое место точек $M(x, y)$, лежащих в первой четверти, для каждой из которых уравнение (1) имеет отрицательные корни, является областью, ограниченной отрезками OH, OA и дугой $\overset{\smile}{AH}$ окружности (I). Для всех остальных положений точки $M(x, y)$, лежащей в первой четверти и вне окружности (I), данное уравнение имеет положительные корни.

7. Дана функция

$$y = \frac{x^2 + 3x + 4m}{x^2 + (5m + 1)x + 3}, \qquad (1)$$

где m — действительный параметр. Доказать, что при любом m график этой функции проходит через 3 фиксированные точки.

Решение. Возьмем произвольную точку $M(x_0, y_0)$ и найдем ту из кривых (1), которая проходит через точку $M(x_0, y_0)$. Иначе говоря, найдем то значение параметра m, при котором график функции (1) проходит через точку $M(x_0, y_0)$. Для этого, считая x_0 и y_0 известными, надо решить уравнение (1) относительно m.

Имеем

$$y_0 [x_0^2 + (5m + 1)x_0 + 3] = x_0^2 + 3x_0 + 4m,$$

или

$$m(5x_0y_0 - 4) + y_0(x_0^2 + x_0 + 3) - (x_0^2 + 3x_0) = 0. \qquad (2)$$

Если $5x_0y_0 - 4 \neq 0$, т. е. точка $M(x_0, y_0)$ не лежит на гиперболе $xy = \frac{4}{5}$, то уравнение (2) является уравнением первой степени относительно m и потому имеет только одно решение.

Значит, если точка $M(x_0, y_0)$ не лежит на гиперболе $xy = \frac{4}{5}$, то через нее проходит только одна кривая (1), соответствующая единственному значению m, найденному из уравнения (2).

Поэтому найдем точки пересечения гиперболы $xy = \frac{4}{5}$ с линиями (1), иначе говоря, решим систему

$$y = \frac{x^2 + 3x + 4m}{x^2 + (5m + 1)x + 3},$$

$$xy = \frac{4}{5}.$$

Имеем

$$\frac{4}{5x} = \frac{x^2 + 3x + 4m}{x^2 + (5m + 1)x + 3},$$

или

$$4x^2 + 4(5m + 1)x + 12 = 5x^3 + 15x^2 + 20mx,$$

$$5x^3 + 11x^2 - 4x - 12 = 0;$$

одним из корней этого уравнения является $x_1 = 1$, тогда $y_1 = \frac{4}{5}$. Далее,

$$5x^3 + 11x^2 - 4x - 12 = (x - 1)(5x^2 + 16x + 12).$$

Решая уравнение

$$5x^2 + 16x + 12 = 0,$$

получим

$$x_2 = -2,\ y_2 = -\frac{2}{5};\ x_3 = -\frac{6}{5},\ y_3 = -\frac{2}{3}.$$

Итак, графики всех данных функций проходят через три точки:

$$M_1\left(1, \frac{4}{5}\right),\ M_2\left(-2, -\frac{2}{5}\right),\ M_3\left(-\frac{6}{5}, -\frac{2}{3}\right).$$

Все они расположены на гиперболе $xy = \frac{4}{5}$, причем точка M_1 лежит на одной ветви, проходящей в первой четверти, а точки M_2 и M_3 — на другой ветви, проходящей в третьей четверти.

XI. Графики функций (задачи для самостоятельного решения)

1. Построить график функции

$$y = \frac{x-1}{x+1}.$$

2. Построить график функции

$$y = \frac{x-1}{|x+1|}.$$

3. Обозначим через (H_m) график функции

$$y = \frac{(2m-1)x + m}{x - m},$$

где m—действительный параметр. Доказать, что все линии (H_m)— гиперболы и все проходят через одну и ту же фиксированную точку.

Ответ. Все линии проходят через точку $A(0, 1)$.

4. Доказать, что функция

$$y = x^3 - 3x + 2$$

возрастает на полуинтервалах $(-\infty, -1]$ и $[1, +\infty)$ и убывает на сегменте $[-1, 1]$.

Доказать, что для двух любых различных значений x_1 и x_2 из полуинтервала $(-\infty, 0]$ имеем

$$\frac{x_1^3 - 3x_1 + 2 + x_2^3 - 3x_2 + 2}{2} < \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^3 - 3\,\frac{x_1 + x_2}{2} + 2,$$

а для двух любых различных значений x_1 и x_2 из полуинтервала $[0, +\infty)$ имеет место противоположное неравенство.

Построить график этой функции.

5. Найти на плоскости множество всех точек $M(x, y)$, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$y^2(y-1)(y-1) = x^2(x+1)(x-1).$$

Указание. Преобразуем данное уравнение последовательно:

$$y^2(y^2-1) - x^2(x^2-1) = 0,$$

$$y^4 - x^4 - (y^2 - x^2) = 0,$$

$$(y^2 - x^2)(x^2 + y^2 - 1) = 0,$$

$$(y-x)(y+x)(x^2+y^2-1) = 0.$$

Отсюда следует, что множество всех точек M, координаты x и y которых удовлетворяют данному уравнению, состоит из всех точек биссектрис

$$y = x \quad \text{и} \quad y = -x,$$

координаты углов и из всех точек окружности радиуса 1 с центром в начале координат ($x^2+y^2=1$).

6. Парабола (C_φ) задана уравнением

$$y = 4x^2 - 12x\sin\varphi - 5\cos 2\varphi,$$

где φ — параметр. Будем считать, что $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$.

1°. Доказать, что при любом значении φ парабола (C_φ) пересекает ось Ox в двух различных точках A и B. Составить уравнение, не зависящее от φ, которому удовлетворяют абсциссы точек A и B.

2°. Вычислить в функции φ длину отрезка AB. Для каких значений φ эта длина наименьшая? Построить графики соответствующих парабол.

3°. Для каких значений φ парабола (C_φ) проходит через начало координат? Построить соответствующие графики.

4°. Составить уравнение геометрического места вершины параболы (C_φ) при условии, что φ изменяется на сегменте $[0, 2\pi]$.

Ответ. 1°. $\Delta = 4(5 - \sin^2\varphi) > 0$. Если x' и x'' — корни функции y, то искомое соотношение

$$36x'x'' - 10(x' + x'')^2 + 45 = 0.$$

2°. $AB = \sqrt{5 - \sin^2\varphi}$; AB минимально, если $\varphi = \frac{\pi}{2}$ или $\varphi = \frac{3\pi}{2}$.

При $\varphi = \frac{\pi}{2}$ имеем $y = 4x^2 - 12x + 5$, или $y = (2x-3)^2 - 4$. Это уравнение параболы с вершиной $\left(\frac{3}{2}, -4\right)$, которая пересекает ось Oy в точке $(0, -4)$. При $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ получаем $y = 4x^2 + 12x + 5$, это парабола, симметричная параболе $(C_{\frac{\pi}{2}})$ относительно оси Oy.

3°. $y = 4x^2 - 6x\sqrt{2}$ $\left(\varphi_1 = \frac{\pi}{4},\ \varphi_1' = \frac{3\pi}{4}\right)$ — парабола с вершиной $\left(\frac{3\sqrt{2}}{4},\ -\frac{9}{2}\right)$. При $\varphi_2 = \frac{5\pi}{4}$ и $\varphi_2' = \frac{7\pi}{4}$ получаем $y = 4x^2 + 6x\sqrt{2}$ — параболу, симметричную параболе (C_{φ_1}) относительно оси Oy.

4°. $y = \frac{4}{9}x^2 - 5$, $-\frac{3}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3}{2}$ (дуга параболы).

7. 1°. Построить график (H) функции

$$y = \frac{1+x}{1-x}.$$

2°. Обозначим через (D) биссектрису $y=x$ координатных углов I и III четвертей. Пусть P — какая-нибудь точка плоскости, не лежащая на прямой (D). Проведем через точку P прямую, параллельную оси Ox, и пусть она пересекает прямую (D) в точке P'. Доказать, что абсцисса точки P' равна ординате точки P.

3°. Пусть теперь P_1 — точка гиперболы (H) с абсциссой $a_1=2$. Проведем через точку P_1 прямую, параллельную оси Ox, и пусть она пересечет прямую (D) в точке P_1'. Через точку P_1' проведем прямую, параллельную оси Oy, и пусть она пересечет гиперболу (H) в точке P_2. Вычислить абсциссу a_2 точки P_2. Теперь для точки P_2 повторим те же построения, т. е. проведем через точку P_2 прямую, параллельную оси Ox, которая пересечет прямую (D) в точке P_2', а затем через точку P_2' проведем прямую, параллельную оси Oy, которая пересечет гиперболу (H) в точке P_3. Вычислить абсциссу точки P_3. Подобным образом исходя из точки P_3 строится точка P_4, а затем исходя из точки P_4 — точка P_5. Вычислить абсциссы a_4 и a_5 точек P_4 и P_5. Доказать, что точка P_5 совпадает с точкой P_1.

4°. Пусть теперь a_1 — какое-нибудь число, отличное от —1, 0 и 1. Рассмотрим на гиперболе (H) точку с абсциссой a_1. Повторим построения предыдущего пункта; вычислить в функции a_1 абсциссы a_2, a_3, a_4 и a_5 точек P_2, P_3, P_4, P_5 и установить, что точка P_5 совпадает с точкой P_1.

5°. Пусть a_1 — произвольное число, не равное —1, 0, 1. Существует угол α, такой, что $a_2 = \operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$. Дать аналогичные выражения для a_3, a_4, a_5 и установить снова, что точки P_5 и P_1 совпадают. Обозначим через A_1, A_2, A_3, A_4 ортогональные проекции на ось Ox точек P_1, P_2, P_3, P_4. Пусть I — точка оси Oy с ординатой, равной 1. Используя выражение для a_1, a_2, a_3, a_4, через α (и тригонометрический круг с центром I, касающийся оси Ox в точке O) установить, как расположены друг относительно друга прямые IA_1, IA_2, IA_3 и IA_4.

Ответ. 5°. Прямые IA_2 и IA_4 — биссектрисы углов, образованных прямыми IA_1 и IA_3.

8. Построить графики следующих функций (1°—6°):

1°. $y = 2^{-x} - 1$,

2°. $y = 2^x + 2^{-x}$,

3°. $y = 8 \cdot 2^x - 1$ (указание: $8 \cdot 2^x = 2^{x+3}$),

4°. $y = 2^{2x-1}$ (указание: $2^{2x-1} = 4^{x-\frac{1}{2}}$),

5°. $y = 2^{\frac{1}{x}}$,

6°. Функция $y=f(x)$ задана графически (рис. 74).

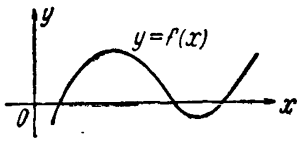

Рис. 74

Начертить на том же чертеже графики функций:

$y = f(x) + a$, $y = f(ax + b)$,

$y = f(x + a)$, $y = af(x) + b$,

$y = af(x)$, $y = |f(x)|$,

$y = f(ax)$,

где a и b — данные вещественные числа.

7°. Построить график функции

$$y = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right).$$

Построить графики следующих функций:

8°. $y = 3\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + 3$,

9°. $y = 3 - x^2$,

10°. $y = 3 \cdot 2^x + 1$,

11°. $y = \left|\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{3}\right)\right| + 2$,

12°. $y = \lg(-x)$,

13°. $y = \log_2(2x + 1)$ $\left(\text{указание: } y = 1 + \log_2\left(x + \frac{1}{2}\right)\right)$

14°. $y = \sin x + \cos x$ $\left(\text{указание: } \sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right)$,

15°. $y = \sin^2 x$ $\left(\text{указание: } \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}\right)$,

16°. $y = \cos^2 x$,

17°. $y = \sqrt{x+1}$,

18°. $y = \sqrt{1-x^2}$ (указание: расстояние между точками графика и началом координат равно 1, так как $x^2 + y^2 = 1$),

19°. $y = \sqrt{1-4x^2}$,

20°. $y = \frac{1}{2}\sqrt{1-4x^2}$,

21°. $y = \frac{1+2x}{x-1}$ (указание: сравнить график этой функции с графиком функции

$$f(x+1) = \frac{1+2(x+1)}{x+1-1} = 2 + \frac{3}{x}\Big),$$

22°. $y = \frac{x}{2x+1}$,

23°. $y = x^3$,

24°. $y = \sqrt[3]{x}$,

25°. $y = x^4$,

26°. $y = \frac{1}{x^2}$,

27°. $y = \frac{1}{x^4}$,

28°. $y = \frac{1}{1-x^2}$,

29°. $y = \frac{1}{1+x^2}$,

30°. $y = 1 - \cos^4 x$,

31°. $y = \frac{1}{\sin x}$,

32°. $y = \frac{1}{\cos^2 x}$,

33°. $y = \frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}$,

34°. $y = \log_2 x^2$,

35°. $x = 2\log_2 x$,

36°. $y = \log_2(2x+1)$,

37°. $y = x^{\frac{1}{\lg x}}$.

XII. Прогрессии (задачи с решениями)

1. Пусть $\overline{abcd}$ — четырехзначное число (d — число единиц, c — число десятков, b — число сотен, a — число тысяч). Пусть M_1 — множество всех четырехзначных чисел, делящихся на 13.

Рассмотрим множество M_2 всех таких четырехзначных чисел $\overline{abcd}$, для которых

$$\overline{cd} = 3(\overline{ab} + 2).$$

Требуется 1°. Расположить в порядке возрастания все числа множества M_1.

Что представляет собой полученная последовательность? Сколько она содержит членов? Найти сумму всех чисел, входящих в множество M_1.

2°. Решить все эти вопросы для чисел множества M_2.

3°. Найти числа, входящие одновременно в множества M_1 и M_2.

Решение. 1°. Наименьшее четырехзначное число, делящееся на 13, есть 1001:

$$1001 = 13 \cdot 77.$$

Наибольшее четырехзначное число, делящееся на 13, есть 9997:

$$9997 = 13 \cdot 769.$$

Таким образом, все четырехзначные числа, делящиеся на 13 и расположенные в порядке возрастания, образуют арифметическую прогрессию, первый член которой равен 1001, последний 9997, а разность равна 13. Число членов прогрессии равно

$$769 - 77 + 1 = 693.$$

Сумма

$$s = \frac{1001 + 9997}{2} \cdot 693 = 3\,810\,807.$$

2°. $\overline{abcd} = 100\overline{ab} + \overline{cd} = 100\overline{ab} + 3(\overline{ab} + 2) = 100\overline{ab} + 3\overline{ab} + 6 =$

$= 103\overline{ab} + 6.$

Отсюда следует, что числа множества M_2, расположенные в порядке возрастания, также образуют арифметическую прогрессию с разностью 103.

Число $103\,\overline{ab}+6$ должно быть четырехзначное, а $\overline{ab}$ — двузначное. Наименьшее двузначное число 10. Значит, первый член прогрессии 1036. Но так как $\overline{cd} \leqslant 99$, то $3(\overline{ab}+2) \leqslant 99$, или $\overline{ab}+2 \leqslant 33$, или $\overline{ab} \leqslant 31$.

Итак, $10 \leqslant \overline{ab} \leqslant 31$.

Отсюда следует, что последний член рассматриваемой прогрессии $103 \cdot 31 + 6 = 3199$.

В этой прогрессии 22 члена $(31 - 10 + 1)$. Ее сумма

$$s' = \frac{1036 + 3199}{2} \cdot 22 = 46\,585.$$

3°. Числа, входящие в множества M_1 и M_2, должны делиться на 13 и иметь вид $103\,\overline{ab}+6$.

Имеем

$$103\overline{ab} + 6 = 104\overline{ab} - \overline{ab} + 6 = 13 \cdot 8 \cdot \overline{ab} + 6 - \overline{ab},$$

и, значит, $6 - \overline{ab}$ должно делиться на 13, т. е. иметь вид $13k$, где k — целое:

$$6 - \overline{ab} = 13k; \quad \overline{ab} = 6 - 13k,$$

с другой стороны,

$$10 \leqslant \overline{ab} \leqslant 31, \text{ или } 10 \leqslant 6 - 13k \leqslant 31.$$

Решая эти неравенства, получим $k = -1$.

Таким образом,

$$\overline{ab} = 6 - 13k = 19,$$

$$\overline{cd} = 3(\overline{ab} + 2) = 3 \cdot 21 = 63,$$

значит, множества M_1 и M_2 имеют только одно общее число 1963.

2. Найти геометрическую прогрессию из пяти членов, если известно, что

$$u_1 u_5 = 25,\ u_2 + u_3 + u_4 = \frac{35}{2}.$$

Р е ш е н и е. Пусть

$$u_1 = a,\ u_2 = aq,\ u_3 = aq^2,\ u_4 = aq^3,\ u_5 = aq^4.$$

Тогда

$$a^2q^4 = 25,$$

$$aq + aq^2 + aq^3 = \frac{35}{2}.$$

Эта система распадается на две

$$\left.\begin{aligned} aq^2 &= 5. \\ aq + aq^2 + aq^3 &= \frac{35}{2} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

и

$$\left.\begin{aligned} aq^2 &= -5, \\ aq + aq^2 + aq^3 &= \frac{35}{2}. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Решая систему (1), находим

$$\frac{aq + aq^2 + aq^3}{aq^2} = \frac{7}{2},$$

$$2q^2 - 5q + 2 = 0,$$

$$q' = 2,\ q'' = \frac{1}{2},$$

$$a' = \frac{5}{4},\ a'' = 20.$$

Соответствующие прогрессии:

$$\frac{5}{4},\ \frac{5}{2},\ 5,\ 10,\ 20;$$

$$20,\ 10,\ 5,\ \frac{5}{2},\ \frac{5}{4}.$$

Решая систему (2), получим

$$2q^2 + 9q + 2 = 0, \text{ или } q^2 + \frac{9}{2}q + 1 = 0.$$

Отсюда

$$q''' = \frac{-9-\sqrt{65}}{4}, \quad q^{IV} = \frac{1}{q'''}.$$

Отсюда находим еще две прогрессии.

3. Рассмотрим три числа a, b, c, заданные соотношениями

$$a = x - 3m, \quad b = 2x - 4m, \quad c = 4x - 12.$$

1°. Определить x в функции m при условии, что числа a, b, c, взятые в этом порядке, образуют геометрическую прогрессию.

2°. Найти все целые значения m, при котором числа a, b, c будут также целыми и, взятые в указанном порядке, образуют геометрическую прогрессию.

3°. При каких целых значениях m числа a, b, c, взятые в этом порядке, образуют геометрическую прогрессию с целым знаменателем.

4°. При каких целых значениях m числа a, b, c, взятые в этом порядке, положительны и образуют геометрическую прогрессию с целым знаменателем.

Р е ш е н и е. 1°. Три числа a, b, c, взятые в этом порядке, образуют геометрическую прогрессию тогда и только тогда, когда $b^2 = ac$, т. е. в данном случае

$$(2x - 4m)^2 - (x - 3m)(4x - 12) = 0,$$

или

$$(m - 3)x = m(4m - 9).$$

Если $m = 3$, то это уравнение не имеет решений. Если $m \neq 3$, то

$$x = \frac{m(4m-9)}{m-3};$$

для этого значения x:

$$a = \frac{m^2}{m-3}, \quad b = \frac{2m(2m-3)}{m-3}, \quad c = \frac{4(2m-3)^2}{m-3}.$$

Если исключить тривиальный случай $m = 0$ (тогда $x = 0$ и $a = b = c = 0$), то знаменатель этой прогрессии равен

$$q = \frac{2(2m-3)}{m}.$$

2°. Пусть m — целое число. Тогда числа a, b, c будут целые тогда и только тогда, когда x — целое.

Но так как

$$x = \frac{4m^2 - 9m}{m-3} = 4m + 3 + \frac{9}{m-3},$$

то x будет целым числом тогда и только тогда, когда 9 делится на m—3. Это возможно только при следующих значениях m:

$$-6,\ 0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 12. \qquad (1)$$

3°. Пусть m — число целое. Тогда знаменатель

$$q = \frac{2(2m-3)}{m} = 4 - \frac{6}{m}$$

будет целым только для следующих значений m:

$$-6,\ -3,\ -2,\ -1,\ 1,\ 2,\ 6 \qquad (2)$$

(значение $m=3$ исключается!).

Все целые значения m, при которых и числа a, b, c, и знаменатель q будут целыми — это числа, которые входят и в множество чисел (1), и в множество чисел (2), т. е. это такие значения m:

$$-6,\ 2,\ 6.$$

4°. Однако из них только при $m=6$ числа a, b, c будут положительными:

$$a = 12,\ b = 36,\ c = 108.$$

Знаменатель q при этом равен 3.

XIII. Прогрессии (задачи для самостоятельного решения)

1. Найти корни уравнения

$$x^3 - 14x^2 + 56x - 64 = 0,$$

зная, что они образуют геометрическую прогрессию.

Указание. Обозначить корни так: a, aq, aq^2.

Ответ. $x_1=2$, $x_2=4$, $x_3=8$.

2. Определить стороны треугольника, если они выражаются целыми числами, образующими арифметическую прогрессию, причем периметр треугольника равен 15.

Указание. Составить систему двух уравнений с тремя неизвестными и выделить целые положительные решения.

3. Доказать, что если $a>0$, $b>0$, $c>0$ соответственно m-й, n-й, p-й члены одновременно как арифметической, так и геометрической прогрессий, то

$$a^{b-c}b^{c-a}c^{a-b} = 1.$$

Указание. Представить a, b, c как члены геометрической прогрессии и как члены арифметической прогрессии.

4. Числа a_1, a_2, a_3, a_4 образуют геометрическую прогрессию, а числа a_1—2, a_2—1, a_3—7, a_4—27 образуют арифметическую прогрессию. Найти числа a_1, a_2, a_3, a_4.

5. Доказать, что если члены a_p, a_q, a_m и a_n арифметической прогрессии составляют геометрическую прогрессию, то $p-q$, $q-m$, $m-n$ будут последовательными членами некоторой геометрической прогрессии.

6. В арифметической прогрессии дан второй член — 5 и разность $d=5$. Вычислить сумму n членов этой прогрессии.

Ответ. $\frac{5}{2}n(n-5)$.

7. Найти первый член и разность арифметической прогрессии, зная, что сумма n ее первых членов равна $4n^2+5n$.

Ответ. 9, 17, 25, ..., $(8n+1)$, ...

8. Найти значение параметра p, при котором корни уравнения

$$x^4-(3p+4)x^2+p^2=0$$

образуют арифметическую прогрессию.

Ответ. 1) $p=12;\ -6,\ -2,\ 2,\ 6$; 2) $p=-\frac{12}{19};\ -\frac{6}{\sqrt{19}},\ -\frac{2}{\sqrt{19}},\ \frac{2}{\sqrt{19}},\ \frac{6}{\sqrt{19}}$.

9. 1°. Найти два положительных числа a и b, таких, что a, $a+2b$, $2a+b$ образуют арифметическую прогрессию, а числа $(b+1)^2$, $ab+5$, $(a+1)^2$ образуют геометрическую прогрессию.

2°. Сколько членов содержит указанные в пункте 1° прогрессии, наибольший член каждой из которых не превосходит 10 000.

Ответ. Арифметическая прогрессия 3, 5, 7, 9, ... (1)

Геометрическая прогрессия 4, 8, 16, 32, ... (2)

Число членов арифметической прогрессии (1), меньших 10 000, равно 4999.

Число членов геометрической прогрессии (2), меньших 10 000, равно 11:

4, 8, 16, 32, 64, 128, 512, 1024, 2048, 4096, 8192.

10. Последовательность

$$u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$$

задана соотношением

$$4u_n=u_{n-1}+12,\ u_1=3.$$

1°. Вычислить u_2, u_3, u_4.

2°. Положим $v_n = u_n - 4$. Доказать, что v_n — геометрическая прогрессия, и найти эту прогрессию.

Ответ: 1°. $u_2 = \frac{15}{4}$, $u_3 = \frac{63}{16}$, $u_4 = \frac{255}{64}$.

2°. $v_n = \frac{1}{4} v_{n-1}$, причем $v_1 = -1$.

XIV. Логарифмическая и показательная функции (задачи с решениями)

1°. Разложить в произведение выражение

$$u = (x + y + z)(xy + yz + zx) - xyz.$$

2°. Даны три числа a, b, c, такие, что

$$0 < a \neq 1,\ 0 < b \neq 1,\ 0 < c \neq 1,\ 0 < abc \neq 1.$$

При каком соотношении между этими числами будет выполняться равенство

$$\log_a x + \log_b x + \log_c x = \log_{abc} x$$

при всех $x > 0$.

Ответ. 1°. $u = (y + z)(z + x)(x + y)$.

2°. $\frac{\lg x}{\lg a} + \frac{\lg x}{\lg b} + \frac{\lg x}{\lg c} - \frac{\lg x}{\lg a + \lg b + \lg c} = 0.$

Это верно при всех $x > 0$ тогда и только тогда, когда

$$\frac{1}{\lg a} + \frac{1}{\lg b} + \frac{1}{\lg c} - \frac{1}{\lg a + \lg b + \lg c} = 0,$$

или

$$(\lg a + \lg b + \lg c)(\lg b \lg c + \lg c \lg a + \lg a \lg b) - \lg a \lg b \lg c = 0,$$

или

$$(\lg b + \lg c)(\lg c + \lg a)(\lg a + \lg b) = 0,$$

или

$$\lg bc \cdot \lg ca \cdot \lg ab = 0,$$

т. е. одно из чисел bc, ca или ab должно быть равно 1:

$$(bc - 1)(ca - 1)(ab - 1) = 0.$$

XV. Логарифмическая и показательная функции (задачи для самостоятельного решения)

1. Доказать, что

$$\log_{a^k} N^k = \log_a N.$$

2. Доказать, что

$$\log_{a^l} N^k = \frac{k}{l} \log_a N.$$

3. Вычислить

$$(a^\alpha)^{-\beta \log_{a^s} N^\gamma}.$$

Ответ.

$$N^{-\frac{\alpha\beta\gamma}{s}}.$$

4. Всегда ли

$$\log_b a^2 = 2 \log_b a?$$

5. Вычислить

$$a^{\frac{\lg\lg N}{\lg a}},\ 0 < a \neq 1.$$

Ответ. $\lg N$.

6. Вычислить $4^{\log_2 5}$.

Ответ. 25.

7. Вычислить $2^{\log_8 7}$.

Находим, что

$$2^{\log_8 7} = (8^{\frac{1}{3}})^{\log_8 7} = (8^{\log_8 7})^{\frac{1}{3}} = 7^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{7}.$$

8. Вычислить $3^{-\log_{\sqrt{3}} 6}$.

Находим, что

$$3^{-\log_{\sqrt{3}} 6} = \frac{1}{3^{\log_{\sqrt{3}} 6}} = \frac{1}{(\sqrt{3})^{2\log_{\sqrt{3}} 6}} = \frac{1}{(\sqrt{3}^{\log_{\sqrt{3}} 6})^2} = \frac{1}{6^2} = \frac{1}{36}.$$

9. Найти $\log_{54} 168$, если $\log_7 12 = a$ и $\log_{12} 24 = b$.

10. Доказать, что если $a^2 + b^2 = 7ab\ (ab \neq 0)$, то

$$\log \frac{|a+b|}{3} = \frac{1}{2}(\log|a| + \log|b|).$$

Указание. Преобразовать и прологарифмировать данное равенство.

11. Найти $\log_{30}8$, если $\log_{30}3=a$, $\log_{30}5=b$.

Указание. $8=\left(\frac{30}{3\cdot 5}\right)^3$.

12. Решить следующие уравнения:

1°. $\sqrt{\log_x \sqrt{3x}\log_3 x}=-1$.

Ответ. $x=\frac{1}{9}$.

2°. $\sqrt{\log_x(5\sqrt{5})+\log_{\sqrt{5}}(5\sqrt{5})\log_{\sqrt{5}}x}=-\sqrt{6}$.

3°. $20\log_{ax}\sqrt{x}+7\log_{a^2x}x^3=3\log_{\frac{x}{\sqrt{a}}}x^2$, где $0<a\neq 1$.

4°. $\log_x 2\log_{2x}2=\log_{4x}2$.

5°. $2\lg 2+\lg(x^2-1)=\lg(4x-1)$.

Ответ. $x=\frac{3}{2}$.

13. Решить следующие уравнения:

1°. $5^x+5^{x+1}+5^{x+2}=3^x+3^{x+1}+3^{x+2}$.

2°. $5^{2x-1}+5^{x+1}=250$.

3°. $3^x+4^x=5^x$.

14. Решить следующие системы уравнений:

1°. $x^{\lg y}=4$, $xy=40$.

2°. $y^{\frac{x}{y}}=x$, $y^3=x^2$.

3°. $\log_y x-\log_x y=\frac{8}{3}$, $xy=16$.

15. Решить следующие неравенства:

1°. $\frac{1}{2^x-1}>\frac{1}{1-2^{x-1}}$.

2°. $\frac{\log_a(35-x^3)}{\log_a(5-x)}>3$, $0<a\neq 1$.

3°. $\frac{2\log_2(3x+1)-1}{\log_2(3x+1)-1}<3$.

4°. $\log_{\frac{1}{3}}(2x+1) > -1$.

5°. $\log_2(2x+1) < 1$. Ответ. $0 < x < \frac{1}{2}$.

6°. $\log_5 x > \log_{125}(3x-2)$. Ответ. $x > \frac{2}{3}$, $x \neq 1$.

ГЕОМЕТРИЯ, ПЛАНИМЕТРИЯ

XVI. Задачи по планиметрии с решениями (без применения тригонометрии)

1. Даны две окружности (C) и (C') одного и того же радиуса R, касающиеся друг друга в точке A. Построить окружность радиуса $2R$, пересекающую под прямым углом окружность (C) и пересекающую окружность (C') в двух диаметрально противоположных точках.

Решение. Пусть (γ) — искомая окружность, ω — ее центр. Обозначим через O и O' центры окружностей (C) и (C'). Так как окружность (γ) пересекает окружность (C) под прямым углом, то $\omega O^2 = (2R)^2 + R^2$, откуда $O\omega = R\sqrt{5}$. Так как окружность (γ) пересекает окружность (C') в двух диаметрально противоположных точках, то

$$\omega O'^2 = 4R^2 - R^2 = 3R^2,$$

откуда

$$\omega O' = R\sqrt{3}.$$

Проведем теперь к окружностям (C) и (C') касательную в точке A и отложим отрезок $AB = 2R$ (рис. 75). Тогда $OB = R\sqrt{5}$. Заметим, что окружность с центром A и радиусом AB пересекает перпендикуляр, проведенный в точке O' к прямой OO' в точке B', такой, что $O'B' = R\sqrt{3}$. Центр ω искомой окружности есть точка пересечения окружностей (S) и (S') с центрами O и O' и радиусами, соответственно равными OB и $O'B'$. Эти окружности пересекаются, притом в двух точках, так как расстояние $OO' = 2R$ между их центрами заключено между разностью $R(\sqrt{5} - \sqrt{3})$ и суммой $R(\sqrt{5} + \sqrt{3})$ радиусов окружностей (S) и (S').

2. Две точки M и M' движутся соответственно по двум равным окружностям C и C' *в одном направлении* и с одной и той же скоростью. Доказать, что перпендикуляр к отрезку MM' в его середине проходит через фиксированную точку I.

Решение. Угол α от OM до OM', взятый со знаком, сохраняет постоянную величину (так как точки M и M' движутся по равным окружностям с одной и той же скоростью и в одном и том

же направлении). Отметим на перпендикуляре l к отрезку OO' в его середине (O и O' — соответственно центры окружностей C и C') точку I, такую, что угол от IO до IO' равен α. Произведем поворот вокруг точки I на угол α. Тогда окружность C совместится с окружностью C', точка O совместится с точкой O', а точка M — с точкой M', так как угол от OM до OM' равен α и $OM=OM'$. Таким образом, $\triangle IMO$ совместится с треугольником $IM'O'$, а потому $IM=IM'$.

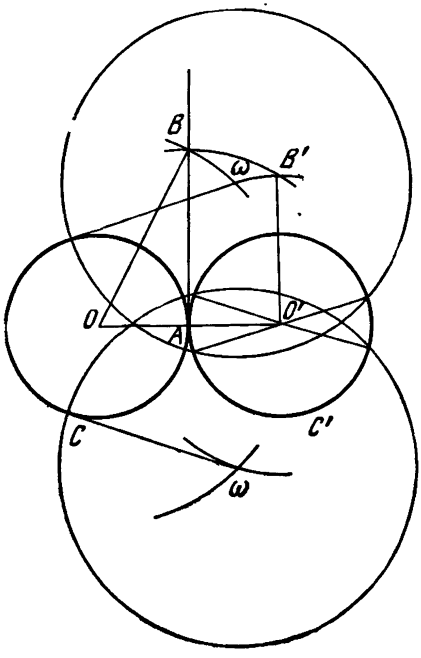

Рис. 75

Итак, перпендикуляр к переменному отрезку MM' в его середине проходит через фиксированную точку I, лежащую на прямой l и определяемую тем условием, что угол от отрезка IO до отрезка IO' равен α (рис. 76).

3. Даны две окружности (C_1) и (C_2), центры которых соответственно O_1 и O_2, а радиусы R_1 и R_2, причем $R_1 \neq R_2$. Эти две окружности пересекаются в точках A и B.

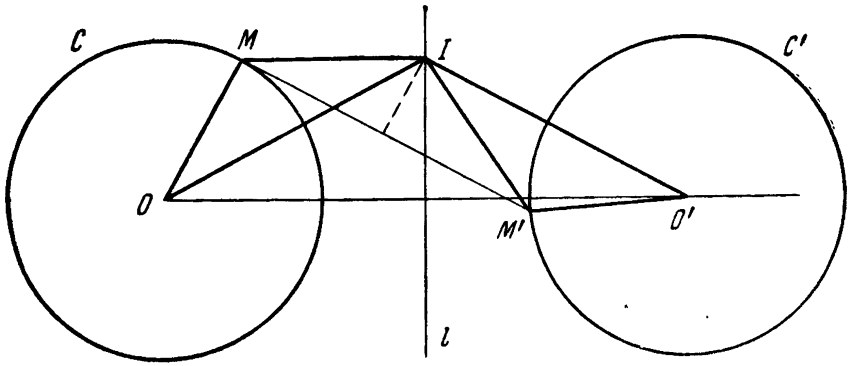

Рис. 76

Переменная точка M_1 описывает окружность (C_1), а переменная точка M_2 описывает окружность (C_2), причем угол от направленного отрезка $\overrightarrow{O_1M_1}$ до направленного отрезка $\overrightarrow{O_2M_2}$ сохраняет постоянную величину θ ($\theta \neq 0$ и $\theta \neq \pi$).

При каком преобразовании плоскости точка M_1 переходит в точку M_2? Имеет ли это преобразование двойную точку O (т. е. та-

кую, которая сама себе соответствует при этом преобразовании). Каково геометрическое место точек O, если θ изменяется от 0 до π?

Р е ш е н и е. Из равенств $O_2M_2 = O_1M_1 \cdot \frac{R_2}{R_1}$ и $(\overrightarrow{O_1M_1}, \overrightarrow{O_2M_2}) = \theta$ следует, что точка M_1 переходит в точку M_2 при преобразовании подобия, причем коэффициент подобия $k = \frac{R_2}{R_1}$, а угол, на который поворачивается плоскость, равен θ. Двойная точка этого подобия определяется из условия

$$OO_2 = OO_1 \frac{R_2}{R_1},$$

т. е. точка O, если она существует, лежит на окружности Аполлония (A), для которой $k = \frac{R_2}{R_1} \neq 1$, а O_1 и O_2 — предельные точки.

Обратно, пусть O — любая точка окружности (A). Если произвести поворот на угол $\theta = (\overrightarrow{OO_1}, \overrightarrow{OO_2})$, при котором точка O_1 перейдет в точку O_1^*, лежащую на луче $\overrightarrow{OO_2}$, а затем гомотетию с центром O и коэффициентом

$$k = \frac{R_2}{R_1},$$

то точка O_1^* перейдет в O_2. В результате этих двух преобразований окружность (C_1) перейдет в окружность (C_2), а всякая точка M_1 окружности (C_1) перейдет в такую точку M_2 окружности (C_2), что $(\overrightarrow{O_1M_1}, \overrightarrow{O_2M_2}) = \theta$. Значит, геометрическое место двойных точек O есть вся окружность (A), за исключением точек ее пересечения с прямой O_1O_2.

4. На оси Ox задана точка H, такая, что $\overline{OH} = x$. Через точку H проведена вторая ось Hu, такая, что угол от оси Ox до оси Hu равен θ. На этой оси берется точка M, определяемая соотношением $\overline{HM} = u$.

1°. Найти ориентированное расстояние y от точки O до прямой, проходящей через точку M перпендикулярно оси HM (указать, на какой оси берется это расстояние y).

Рассмотрим окружность (O) радиуса R, пересекающую прямую HM в точках A' и A''. Вычислить сумму и произведение величин $\overline{HA'}$ и $\overline{HA''}$; составить уравнение второй степени, из которого определяются $\overline{HA'}$ и $\overline{HA''}$. Исследовать, при каких случаях существуют $\overline{HA'}$ и $\overline{HA''}$, считая, что R фиксировано, а x и θ — переменные; интерпретировать результат исследования геометрически.

Составить квадратное уравнение, из которого находятся ориентированные расстояния u' и u'' от точки O до медиатрис отрезков HA' и HA''; сравнить полученное уравнение с предыдущим; установить тождественность результатов.

2°. Существуют ли треугольники, вписанные в окружность радиуса R с центром O, для которых H — ортоцентр? Предполагая, что точка A выбрана на описанной окружности, построить B и C.

Как связано с этим треугольником свойство, указанное в конце пункта 1°?

Исследовать возможность построения одного или нескольких треугольников ABC в зависимости от положения точки A на описанной окружности и от относительного положения точки H и этой окружности.

Может ли треугольник ABC быть остроугольным?

Р е ш е н и е. 1°. **Вычисление** y. Проектируя ломаную $\overrightarrow{OHM}$ и ее замыкающую $\overrightarrow{OM}$ на ось $\overrightarrow{OK}$ (K — проекция точки O на прямую, проходящую через точку M перпендикулярно прямой HM), получим (рис. 77)

$$\overline{OH}\cdot\cos 0 + \overline{HM} = \overline{OK},$$

или

$$y = x\cos\theta + u.$$

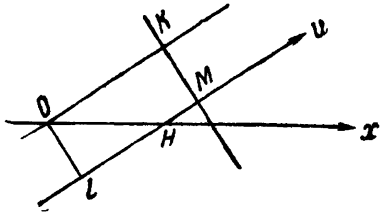

Рис. 77

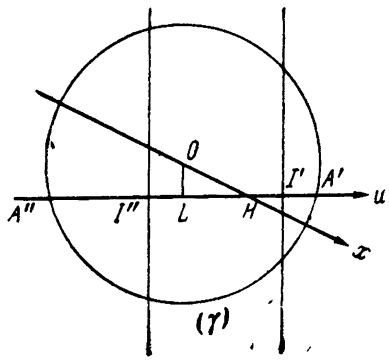

Рис. 78

Уравнение, корни которого $\overline{HA'}$ **и** $\overline{HA''}$. Положим $\lambda' = \overline{HA'}$, $\lambda'' = \overline{HA''}$ (рис. 78). Имеем

$$\lambda'\lambda'' = OH^2 - R^2 = x^2 - R^2,$$

$$\lambda' + \lambda'' = \overline{HA'} + \overline{HA''} = 2\overline{HL} = -2\overline{LH} = -2x\cos\theta.$$

Таким образом, λ' и λ'' — корни квадратного уравнения

$$\lambda^2 + 2\lambda x\cos\theta + x^2 - R^2 = 0. \qquad (1)$$

Исследование. Вычисляем дискриминант этого уравнения:

$$\Delta = x^2\cos^2\theta - (x^2 - R^2) = R^2 - x^2\sin^2\theta;$$

значит, уравнение (1) имеет действительные корни тогда и только тогда, когда

$$\Delta = R^2 - x^2 \sin^2\theta \geqslant 0. \qquad (2)$$

Замечая, что

$$OL^2 = OH^2 - LH^2 = x^2 - x^2\cos^2\theta = x^2\sin^2\theta,$$

заключаем, что соотношение $\Delta \geqslant 0$ означает: точка L должна лежать внутри окружности (γ) или на самой окружности. Это условие, очевидно, выполняется, если точка H лежит внутри окружности (γ). Если же точка H лежит вне окружности (γ), то оно будет выполняться тогда и только тогда, когда прямая Hu проходит внутри того угла между касательными, проведенными из H к (γ), в котором лежит точка O.

Уравнение, определяющее u' и u''. Обозначим середины отрезков HA' и HA'' соответственно через I' и I''.

Тогда

$$u' = \overline{LI'} = \overline{LH} + \overline{HI'} = x\cos\theta + \frac{\lambda'}{2},$$

$$u'' = \overline{LI''} = \overline{LH} + \overline{HI''} = x\cos\theta + \frac{\lambda''}{2}.$$

Отсюда находим

$$u' + u'' = 2x\cos\theta + \frac{1}{2}(\lambda' + \lambda'') = x\cos\theta,$$

$$u'u'' = x^2\cos^2\theta + x\frac{\lambda' + \lambda''}{2}\cos\theta + \frac{\lambda'\lambda''}{4} =$$

$$= x^2\cos^2\theta - x^2\cos^2\theta + \frac{x^2 - R^2}{4} = \frac{x^2 - R^2}{4}$$

и уравнение, из которого определяются u' и u'', имеет вид

$$u^2 - ux\cos\theta + \frac{x^2 - R^2}{4} = 0. \qquad (3)$$

Мы получим корни этого уравнения, умножая на $-\frac{1}{2}$ корни уравнения (1). В самом деле,

$$u'u'' = \frac{\lambda'\lambda''}{4} \quad \text{и} \quad u' + u'' = -\frac{\lambda' + \lambda''}{2}.$$

Геометрическая интерпретация. Произведем сначала симметрию относительно точки L, а затем гомотетию с центром H и коэффициентом гомотетии, равным $+\frac{1}{2}$. Произведение этих преобра-

зований в указанном порядке есть гомотетия с коэффициентом $-\frac{1}{2}$. Точки H, A' и A'' преобразуются соответственно в точки L, I'' и I', значит,

$$u'' = \overline{LI''} = -\frac{1}{2}\overline{HA'} = -\frac{\lambda'}{2},$$

$$u' = \overline{LI'} = -\frac{1}{2}\overline{HA''} = -\frac{\lambda''}{2}.$$

2°. **Изучение треугольников, вписанных в окружность (γ), для которых H — ортоцентр.** Пусть A — точка, лежащая на окружности (γ), и A_1 — точка (вообще говоря, единственная), в которой прямая HA вторично пересекает окружность.

Если существует треугольник, удовлетворяющий условию задачи, то точка, симметричная точке H относительно стороны BC, есть точка A_1. Построим медиатрису отрезка HA_1. Если она пересекает окружность (γ) в двух точках B и C, то треугольник ABC удовлетворяет условию задачи. Обозначим через K середину отрезка BC, иначе говоря, проекцию точки O на медиатрису HA_1. Тогда $\overrightarrow{OK} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{HA}$.

Исследование. Треугольник ABC существует тогда и только тогда, когда точка K лежит внутри окружности (γ), следовательно, если $HA < 2R$. Построим окружность (Г) с центром H и радиусом $2R$ (рис. 79).

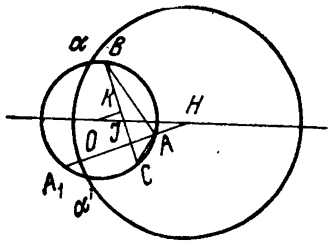

Рис. 79

Если $OH < R$, то любая точка A окружности (γ) лежит внутри окружности (Г); прямая AH однозначно определена, и для выбранной точки A имеется только один треугольник ABC.

Если $OH = R$, то надо рассмотреть два случая.

1) Точка A совпадает с точкой H. В этом случае ей соответствует бесконечное множество треугольников ABC, поскольку прямая AH не определена и решением является любой треугольник с вершиной A, две другие вершины которого B и C — концы диаметра окружности (γ).

2) Если же точка A совпадает с точкой, симметричной точке H относительно O, то ей соответствует вырожденный треугольник ABC.

Если $R < OH < 3R$, то окружность (Г) пересекает окружность (γ) в двух различных точках α и α'. Каждой точке A дуги $\alpha\alpha'$ окружности (γ), лежащей внутри окружности (Г), соответствует только один треугольник ABC (вырожденный в случае, если точка A совпадает с точкой α или с точкой α').

Если $OH > 3R$, все точки (γ) лежат вне окружности (Г); решений нет.

Если, наконец, $OH=3R$ (предельный случай), то A есть точка прикосновения окружностей (γ) и (Γ) (касающихся внешним образом), получается вырожденный треугольник ABC.

Случай, когда все углы треугольника ABC острые. Пусть A — наибольший угол треугольника ABC. Тогда углы B и C оба острые и высота, опущенная из вершины A на сторону BC, пересекает *отрезок* BC в некоторой точке I, расположенной между точками B и C, причем точка I расположена между точками A и A_1, где A_1 — точка, в которой AI вторично пересекает окружность (γ).

Если A — острый угол, то направленный отрезок $\overrightarrow{OK}$, следовательно, и $\overrightarrow{AH}$ имеет то же направление, что и $\overrightarrow{AI}$, и точка H расположена между A и I, следовательно, внутри (γ).

Если A — тупой угол, то направленные отрезки $\overrightarrow{OK}$, следовательно, и $\overrightarrow{AH}$, направлены одинаково с $\overrightarrow{IA}$, значит, точка H лежит вне окружности (γ).

Наконец, если $A=\frac{\pi}{2}$, то H совпадает с A.

Окончательно, все углы треугольника ABC будут острыми тогда и только тогда, когда точка H лежит внутри окружности (γ), иначе говоря, если $x<R$.

5. На плоскости заданы два отрезка A_1B_1 и A_2B_2 разной длины:

$$\frac{A_2B_2}{A_1B_1}=k\neq 1.$$

Построить на плоскости точку O, обладающую следующим свойством: при повороте вокруг точки O на угол α (равный углу между направленными отрезками $\overrightarrow{A_1B_1}$ и $\overrightarrow{A_2B_2}$) и при последующей гомотетии с центром O и коэффициентом k отрезок A_1B_1 перейдет в отрезок A_2B_2.

Р е ш е н и е. Предварительно решим следующую задачу: на плоскости заданы две точки A_1, A_2; кроме того, задан ориентированный угол α и число $0<k\neq 1$. Построить точку O, такую, что при повороте вокруг нее на угол α и при последующей гомотетии с центром O точка A_1 перешла бы в точку A_2.

Для решения этой задачи построим геометрическое место точек M, для каждой из которых

$$\frac{MA_1}{MA_2}=\frac{1}{k}.$$

Это геометрическое место точек является окружностью (A) Апполония, для которой A_1 и A_2 — предельные точки. Построим дугу A_2C окружности, такую, что угол от направленного отрезка $\overrightarrow{CA_1}$ до направленного отрезка $\overrightarrow{CA_2}$ равен α. Эта дуга пересекает окружность (A) в некоторой точке O, так как один из ее концов A_1 лежит внутри окружности (A), а другой A_2 — вне ее.

При повороте вокруг точки на угол α, равный углу от направленного отрезка $\overrightarrow{OA_1}$ до направленного отрезка $\overrightarrow{OA_2}$, точка A_1 перейдет в точку A_0, лежащую на луче OA_2, причем, так как

$$\frac{OA_1}{OA_2} = \frac{1}{k},$$

то и

$$\frac{OA_0}{OA_2} = \frac{1}{k}.$$

Теперь при гомотетии (O, k) точка A_0 перейдет в точку A_2.

Данная задача решается так же, только надо выбрать

$$k = \frac{A_2B_2}{A_1B_1}$$

и за угол α принять угол от направленного отрезка $\overrightarrow{A_1B_1}$ до направленного отрезка $\overrightarrow{A_2B_2}$. Тогда после проведения указанного поворота и гомотетии не только точка A_1 перейдет в точку A_2, но точка B_1 — в точку B_2.

6. В точках A, B, C сосредоточены массы, соответственно равные α, β и γ. Пусть Ω — центр тяжести системы этих материальных точек, а M — любая точка (может и не лежащая в плоскости треугольника ABC). Доказать, что

$$M\Omega^2 = \frac{\alpha MA^2 + \beta \cdot MB^2 + \gamma \cdot MC^2}{\alpha + \beta + \gamma} - \frac{\alpha\beta\, AB^2 + \beta\gamma\, BC^2 + \gamma\alpha\, CA^2}{(\alpha + \beta + \gamma)^2}. \quad (1)$$

Доказательство. Пусть O — точка, лежащая на прямой AB и делящая отрезок $\overrightarrow{AB}$ в отношении $\frac{\beta}{\alpha}$:

$$\frac{\overrightarrow{AO}}{\overrightarrow{OB}} = \frac{\beta}{\alpha}.$$

Тогда

$$\overline{AO} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overline{AB},\ \overline{OB} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\overline{AB},$$

и применяя к треугольнику MAB теорему Стюарта, получим

$$MO^2 \cdot \overline{AB} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\overline{AB} \cdot MA^2 + \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overline{AB} \cdot MB^2 - \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2}\overline{AB}^3,$$

откуда

$$MO^2 = \frac{\alpha\, MA^2 + \beta\, MB^2}{\alpha+\beta} - \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2} \cdot AB^2. \quad (2)$$

Точка Ω делит отрезок $\overrightarrow{OC}$ в отношении $\frac{\gamma}{\alpha+\beta}$:

$$\frac{\overline{O\Omega}}{\overline{\Omega C}}=\frac{\gamma}{\alpha+\beta},$$

значит,

$$\overline{\Omega C}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overline{OC},\ \overline{O\Omega}=\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overline{OC}$$

и, применяя теорему Стюарта для треугольника MOC, получим

$$M\Omega^2\cdot\overline{OC}=\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}MC^2\cdot\overline{OC}+\frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta+\gamma}MO^2\cdot\overline{OC}-$$
$$-\frac{\gamma(\alpha+\beta)}{(\alpha+\beta+\gamma)^2}\overline{OC}^3,$$

или

$$M\Omega^2=\frac{\gamma MC^2}{\alpha+\beta+\gamma}+\frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta+\gamma}MO^2-\frac{\gamma(\alpha+\beta)}{(\alpha+\beta+\gamma)^2}OC^2. \qquad (3)$$

Наконец, из треугольника ABC по теореме Стюарта находим

$$\overline{CO}^2\cdot\overline{AB}=CB^2\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overline{AB}+CA^2\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\overline{AB}-\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2}\overline{AB}^3,$$

или

$$CO^2=CB^2\frac{\beta}{\alpha+\beta}+CA^2\frac{\alpha}{\alpha+\beta}-\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2}AB^2. \qquad (4)$$

Подставляя в формулу (3) вместо MO^2 и OC^2 их выражения из формул (2) и (4), после упрощений получим формулу (1) (формула Лейбница).

Замечание. Среди масс α, β, γ могут быть и отрицательные, однако должно быть $\alpha+\beta+\gamma\neq0$. Центр тяжести Ω тогда определяется формально (в случае, например, $\alpha<0$ точка O берется на продолжении отрезка AB и т. д.). Проведенный выше вывод при этом полностью сохраняется.

XVII. Задачи по планиметрии для самостоятельного решения (без применения тригонометрии)

1. Дана прямоугольная трапеция $ABCD$ (углы A и B прямые). Пусть O — середина отрезка AB. Дано

$$AB=2a,\quad AD=b,\quad BC=c.$$

При каком необходимом и достаточном условии угол DOC острый?

Ответ. $bc>a^2$.

2. Построить окружность, касающуюся данной окружности и данной прямой в данной на ней точке.

3. Построить окружность, касающуюся данной прямой и данной окружности в данной на ней точке.

4. Назовем расстоянием от точки до окружности длину наименьшего отрезка, один конец которого является данной точкой, а другой лежит на данной окружности. Построить окружность, равноудаленную от четырех данных точек плоскости.

5. На одной из сторон данного угла дан отрезок AB. Построить на второй стороне угла точку C, из которой отрезок AB виден под наибольшим углом.

6. Точка M лежит внутри треугольника ABC. Расстояния от точки M до сторон BC, CA и AB треугольника ABC равны соответственно d_a, d_b, d_c. Обозначим через h_a, h_b, h_c высоты треугольника ABC. Доказать, что

$$\frac{d_a}{h_a}+\frac{d_b}{h_b}+\frac{d_c}{h_c}=1.$$

7. По одну сторону от данной прямой xy расположены две точки A и B. Построить на прямой xy отрезок MN данной длины l так, чтобы ломаная $AMNB$ имела наименьшую длину.

8. Центральный угол сектора равен 90°; радиус дуги сектора равен 5. В сектор вписан прямоугольник, у которого одна сторона в 6 раз больше другой. Найти стороны.

Ответ: 6 и 1.

9. В правильном треугольнике ABC со стороной a проведена средняя линия MN параллельно AC. Через точку A и середину MN проведена прямая до пересечения с BC в точке D. Найти длину отрезка AD.

Ответ. $\frac{a\sqrt{7}}{3}$.

10. В равнобедренном треугольнике ABC параллельно основанию AC проведена средняя линия MN. Радиус окружности, описанной около трапеции $ACMN$, в $\frac{\sqrt{5}}{2}$ раз больше радиуса окружности, описанной около треугольника ABC. Найти углы треугольника ABC.

Ответ. $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4}$.

11. Доказать, что если S_1, S_2, S_3 — площади, отсекаемые от треугольника ABC касательными к вписанной окружности и соответственно параллельным сторонам a, b, c треугольника, то

$S_1 : S_2 : S_3 : S = (p-a)^2 : (p-b)^2 : (p-c)^2 : p^2$, где S — площадь треугольника ABC.

12. В параллелограмме отношение сторон и отношение диагоналей одинаковы и равны $\frac{1}{2}$. Из вершины тупого угла A опущена высота AE на бо́льшую сторону CD. Найти отношение длины отрезка DE к длине CE.

13. На сторонах прямоугольного треугольника с катетами a и b построены квадраты, лежащие вне треугольника. Найти площадь треугольника с вершинами в центрах квадратов.

14. Найти площадь параллелограмма, если его бо́льшая диагональ 5 *см*, а высоты 2 и 3 *см*.

Ответ. $\frac{6}{5}(3\sqrt{21}-8)$.

15. В равнобедренном треугольнике с углом 120° радиус вписанной окружности равен R. Внутри треугольника лежат два равных касающихся круга, каждый из которых касается одной боковой стороны треугольника и вписанной в треугольник окружности. Найти радиусы этих кругов. (Найти все решения.)

Ответ. $x_1 = \frac{R}{3}$, $x_2 = \frac{3-2\sqrt{2}}{3}R$.

16. Около окружности описана равнобочная трапеция. Площадь четырехугольника с вершинами в точках касания составляет $\frac{3}{8}$ площади трапеции. Найти отношение оснований трапеции.

Ответ. 3.

17. В трапеции основания равны 84 и 42 *см*, а боковые стороны 39 и 45 *см*. Через точку пересечения диагоналей параллельно основаниям проведена прямая. Определить площади получившихся трапеций.

Ответ. $S_1 = 588$, $S_2 = 1680$.

18. В $\triangle ABC$ $BC=a$, $AB=c$, $AC=b$. На BC выбрана точка D таким образом, что окружности, вписанные в $\triangle ABD$ и $\triangle ADC$, касаются. Найти BD.

19. В окружности радиуса R проведена хорда. Сумма ее длины и расстояния от центра круга до хорды равна a. Найти длину хорды.

20. Отрезки, образуемые на одной из сторон треугольника точкой касания вписанной окружности, равны m и n, а противолежащий этой стороне угол равен 60°. Найти площадь треугольника.

21. Вершины равностороннего треугольника расположены на трех параллельных прямых. Расстояния от средней прямой до двух крайних равны a и b. Найти сторону треугольника.

22. В полукруг вписан четырехугольник, три последовательные стороны которого равны $2\sqrt{5}$, $2\sqrt{5}$, 6, а четвертая сторона является диаметром полукруга. Найти радиус полукруга.

23. Две окружности радиусов r_1 и r_2 касаются окружности радиуса R внешним образом в точках, расстояние между которыми равно a. Найти длину общей внешней касательной к первым двум окружностям.

24. Определить стороны прямоугольного треугольника, если его периметр равен 12 *см*, а площадь 6 *см*^{2}.

Указание. Составить систему трех уравнений.

25. Определить вид треугольника, если длины a, b, c его сторон связаны соотношением $a^4+b^4+c^4=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$.

Указание. Преобразовать данное равенство к виду

$$(a^2-b^2)^2+(b^2-c^2)^2+(c^2-a^2)^2=0.$$

26. Внутри угла 60° расположена точка на расстоянии a и b от его сторон. Найти расстояние от этой точки до вершины данного угла.

Указание. Воспользоваться соотношением сторон прямоугольного треугольника с острым углом 30°.

27. Выразить через стороны треугольника:

а) высоты h_a, h_b, h_c;

б) радиус r вписанной окружности;

в) радиус R описанной окружности.

Примечание. Эти задачи следует решать без применения тригонометрии.

28. На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC взяты соответственно точки P, Q и R, такие, что

$$\frac{BP}{PC}=\alpha,\ \frac{CQ}{QA}=\beta,\ \frac{AR}{RB}=\gamma.$$

Найти отношение площади треугольника PQR к площади треугольника ABC.

Указание. Выразить через площадь $\triangle ABC$ площади треугольников PCQ, QAR и RBP. Для вычисления площади $\triangle PCQ$, например, рассмотреть $\triangle APC$.

29. Окружность касается двух смежных сторон квадрата и делит третью на два отрезка a и b. Найти радиус этой окружности.

Указание. Центр окружности лежит на диагонали квадрата.

30. Круга радиуса r касаются внешним образом три равные окружности, касающиеся, кроме того, попарно между собой. Найти площади трех криволинейных треугольников, образованных указанными окружностями.

Указание. Рассмотреть треугольник с вершинами в центрах равных окружностей.

31. К двум внешне касающимся окружностям радиусов R и r проведена общая касательная. Определить радиус окружности, касающейся двух данных и их общей касательной. Вычислить при $r=\frac{R}{2}$.

32. Найти геометрическое место вершин B и C прямоугольного треугольника ABC ($\angle BAC=90°$), если точка A фиксирована, гипотенуза BC параллельна фиксированной прямой, а середина O гипотенузы BC описывает окружность с центром A.

Ответ. Две окружности, проходящие через точку A.

33. Дан равносторонний треугольник ABC. Окружность (β) касается стороны AB в точке B; окружность (γ) касается стороны AC в точке C. Дано, что окружности (β) и (γ) пересекаются.

1°. а) Доказать, что точки их пересечения M и N и точка A принадлежат одной прямой.

2°. Дано, что окружности (β) и (γ) касаются в некоторой точке P; где находится их точка касания?

34. Пусть ABC — какой-нибудь треугольник. Обозначим через A_1, B_1, C_1 соответственно середины его сторон BC, CA и AB. Пусть M — произвольная точка плоскости. Обозначим через A', B', C' точки, симметричные точке M соответственно относительно точек A_1, B_1, C_1. Доказать, что прямые AA', BB', CC' проходят через одну и ту же точку M'. Доказать, что точки M, M' и центр тяжести G треугольника ABC принадлежат одной прямой, причем точка M' получается из точки M при гомотетии с центром в точке G и коэффициентом гомотетии, равным $-\frac{1}{2}$.

35. Дан треугольник ABC, G — его центр тяжести. 1°. Выразить

$$f(M) = MB\cdot MC\cos\widehat{BMC} + MC\cdot MA\cos\widehat{CMA} + MA\cdot MB\cos\widehat{AMB}$$

только через длины отрезков MG, BC, CA и AB.

2°. Найти геометрическое место точек M, для каждой из которых $f(M)=0$. Какая из точек этого геометрического места принадлежит окружности с диаметром BC?

Ответ. 1°. $f(M) = 3MG^2 - \frac{1}{6}(BC^2 + CA^2 + AB^2)$.

2°. Геометрическое место точек M, таких, что $f(M)=0$, является окружностью (Г) с центром G и радиусом

$$\frac{1}{6}\sqrt{2(a^2+b^2+c^2)},$$

где $a=BC$, $b=CA$, $c=AB$.

Точки окружности (Г), лежащие на окружности с диаметром BC, — это то же, что точки пересечения окружностей с диаметрами BC и AA' (A' — середина BC). Если A — тупой угол, то точка A лежит внутри окружности с диаметром BC; решений нет. Если A — прямой угол, то условию задачи удовлетворяет только она сама.

Если A — острый угол, то — два решения.

36. Решить треугольник по следующим данным:

1) a, A, $2p$; 2) a, A, $h_b + h_c = k$; 3) a, B, $b + c = k$.

СТЕРЕОМЕТРИЯ

XVIII. Задачи по стереометрии с решениями (без применения тригонометрии)

1. В пространстве даны два луча Ax и By, не лежащие в одной плоскости; прямая AB — их общий перпендикуляр. На лучах Ax и By выбираются соответственно переменные точки M и P таким образом, что

$$AM \cdot BP = \frac{1}{2} AB^2.$$

Доказать, что прямая MP касается фиксированной сферы.

Доказательство. Пусть M' — ортогональная проекция точки M на плоскость, перпендикулярную к прямой AB в точке B (рис. 80). Точка M' лежит на луче Bx', параллельном и одинаково направленном с лучом Ax. Из прямоугольного треугольника MPM' имеем

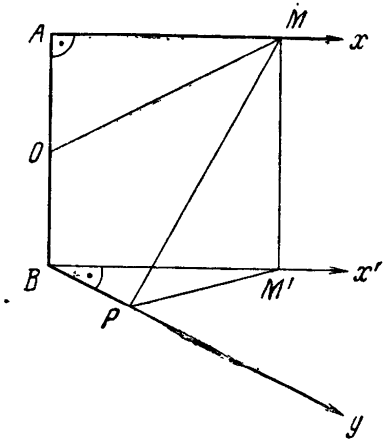

Рис. 80

$$MP^2 = MM'^2 + M'P^2 = AB^2 + M'P^2,$$

и так как треугольник PBM' также прямоугольный, то

$$MP^2 = AB^2 + BM'^2 + BP^2,$$

или

$$MP^2 = AB^2 + AM^2 + BP^2,$$

или (в силу того, что $AB^2 = 2AM \cdot BP$)

$$MP^2 = (AM + BP)^2,$$

т. е. $MP = AM + BP$.

Отложим теперь на отрезке MP от точки M к точке P отрезок $MH = AM$ (следовательно, $PH = BP$), и пусть O — середина отрезка AB, а I — середина отрезка MP. Тогда

$$OM^2 = OA^2 + AM^2 = OA^2 + MH^2,$$

$$OP^2 = OB^2 + BP^2 = OB^2 + PH^2.$$

Отсюда

$$OM^2 - OP^2 = HM^2 - HP^2 = (\overline{HM} + \overline{HP})\,(\overline{HM} - \overline{HP}),$$

или

$$OM^2 - OP^2 = 2\overline{MP} \cdot \overline{IH},$$

Значит, $OH \perp MP$. С другой стороны,

$$OH^2 = OM^2 - MH^2 = OA^2 + AM^2 - MH^2,$$

и поскольку $AM = MH$, имеем $OH^2 = OA^2$, то $OH = OA$.

Таким образом, $OH \perp MP$ и $OH = OA$, следовательно, прямая MP касается в точке H сферы с диаметром AB.

Дополнительный вопрос. Решить задачу, считая, что угол между осями Ax и By равен α и что

$$AM \cdot BP = \frac{AB^2}{4\cos^2\frac{\alpha}{2}}.$$

2. AB и BC — две стороны квадрата $ABCD$. Этот квадрат является одной из граней куба $ABCDEFGH$, в котором ребра AE, BF, CG и DH параллельны, O — центр куба; I — середина ребра EF; J — середина ребра EH.

1°. Доказать, что $IA = IG$ и $JA = JG$.

2°. Найти геометрическое место точек m, лежащих внутри квадрата $EFGH$, для каждой из которых $mA = mG$.

3°. Найти геометрическое (ε) точек M, лежащих внутри квадрата $EFGH$, для каждой из которых

$$MA \leqslant MG.$$

4°. Найти геометрическое место (ε′) точек P, лежащих внутри квадрата $EFGH$, для каждой из которых выполнены четыре соотношения:

$$PG \leqslant PA, \quad PH \leqslant PB, \quad PE \leqslant PC, \quad PF \leqslant PD.$$

Решение. 1°. Треугольники IEA, IFG, JEA, JHG прямоугольные, причем у каждого из них один катет равен ребру данного куба, а другой — половине этого ребра. Значит, эти треугольники равны (рис. 81) и потому

$$IA = IG = JA = JG.$$

2°. Геометрическое место точек, равноудаленных от точек A и G, есть плоскость π, проходящая через середину O отрезка AG перпендикулярно к этому отрезку. На основании доказанного выше точки I и J лежат на плоскости π. Плоскость π пересекает грань $EFGH$ по отрезку IJ. Геометрическое место точек m состоит, таким образом, из всех внутренних точек отрезка IJ.

3°. Геометрическое место точек M пространства, для каждой из которых выполняется соотношение $MA \leqslant MG$, состоит из всех точек, лежащих на плоскости π, и всех точек M, лежащих по ту сторону от плоскости π, где лежит точка A.

Отсюда следует, что геометрическое место точек M, лежащих внутри квадрата $EFGH$, для каждой из которых $MA \leqslant MG$ состоит

из всех точек, лежащих внутри треугольника EIJ, за исключением точек I и J.

4°. Пусть L — середина отрезка HG, а K — середина отрезка GF. На основании предыдущего геометрическое место точек P, лежащих внутри квадрата $EFGH$, для каждой из которых выполняются соотношения

$$PG \leqslant PA, \quad PH \leqslant PB, \quad PE \leqslant PC, \quad PF \leqslant PD,$$

состоит из всех точек, лежащих внутри квадрата $IJLK$ и на его границе, за исключением вершин I, J, L, K (рис. 82).

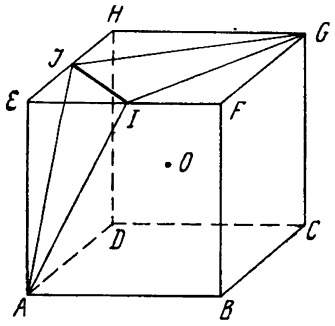

Рис. 81

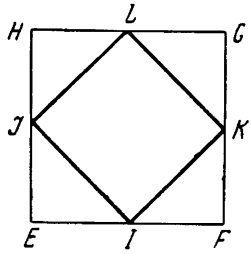

Рис. 82

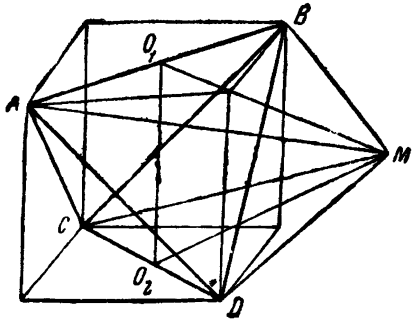

Рис. 83

3. $ABCD$ — правильный тетраэдр, каждое ребро которого равно a. Фиксировано число k. Найти геометрическое место точек M, для каждой из которых

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = k. \qquad (1)$$

Р е ш е н и е. Построим куб, такой, что стороны данного тетраэдра будут диагоналями его граней. Пусть M пока произвольная точка пространства. Тогда, дополняя $\triangle ABM$ до параллелограмма (со сторонами MA и MB), будем иметь (рис. 83): $4MO_1^2 + AB^2 = 2MA^2 + 2MB^2$, где O_1 — середина отрезка AB.

Аналогично $4MO_2^2 + CD^2 = 2MC^2 + 2MD^2$, где O_2 — середина отрезка CD.

Складывая полученные равенства и учитывая, что $AB = CD = a$, получим

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = a^2 + 2MO_1^2 + 2MO_2^2.$$

Пусть O — середина отрезка O_1O_2. Дополняя $\triangle MO_1O_2$ до параллелограмма, получим

$$2MO_1^2 + 2MO_2^2 = 4MO^2 + O_1O_2^2 = 4MO^2 + \frac{a^2}{2},$$

и потому

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = \frac{3}{2}a^2 + 4MO^2.$$

Данное равенство (1) будет выполнено тогда и только тогда, когда

$$k = \frac{3}{2}a^2 + 4MO^2,$$

или

$$MO^2 = \frac{1}{4}\left(k - \frac{3}{2}a^2\right).$$

Если $k < \frac{3}{2}a^2$, то заданное геометрическое место точек M пусто.

Если $k = \frac{3}{2}a^2$, то $MO^2 = 0$, $MO = 0$, значит, заданное геометрическое место точек состоит из одной точки O (середины бимедианы O_1O_2, т. е. отрезка, концами которого являются середины ребер AB и CD).

Если $k > \frac{3}{2}a^2$, то заданное геометрическое место точек есть сфера S радиуса

$$\rho = \frac{1}{2}\sqrt{k - \frac{3}{2}a^2}$$

с центром в точке O.

Заметим, что диагональ d построенного куба равна

$$d = \sqrt{\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}\,a,$$

а значит, радиус R сферы Σ, описанной вокруг этого куба, равен

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\,a.$$

Сфера S совпадает со сферой Σ, если

$$\frac{1}{2}\sqrt{k-\frac{3}{2}a^2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}a,$$

откуда

$$k=a\sqrt{3}.$$

4. В плоскости (P) задан прямоугольный треугольник ABC с катетами $AB=3a$, $AC=4a$. На прямой (D), перпендикулярной в точке A к плоскости (P), берется точка M, такая, что $AM=x$.

1°. Построить центр сферы, описанной вокруг тетраэдра $ABCM$ и вычислить ее радиус.

2°. Считая, что x изменяется, найти геометрическое место проекции B' точки B на прямую CM.

Решение. 1°. **Центр и радиус сферы, описанной вокруг тетраэдра *MABC*.** Множество точек пространства, каждая из которых равноотстоит от точек A, B, C, является осью окружности (ABC)*. Так как центр окружности (ABC) есть середина O отрезка BC, то ось (Δ) окружности (ABC) — прямая (Δ), проходящая через точку O перпендикулярно плоскости (P) (рис. 84). Центр Ω сферы $(MABC)$** лежит на прямой (Δ). С другой стороны, множество точек, равноудаленных от точек A и M, есть плоскость-медиатриса отрезка AM, т. е. плоскость, проходящая через середину I отрезка AM перпендикулярно отрезку AM. Эта плоскость пересекает плоскость, проходящую через параллельные прямые (D) и (Δ) по прямой l, проходящей через точку I параллельно AO; прямая l пересекает (Δ) в искомой точке Ω.

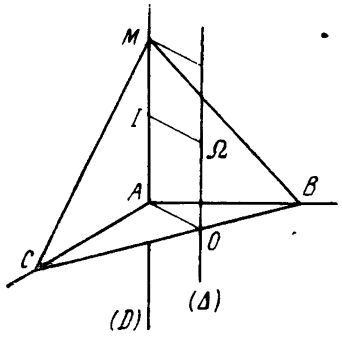

Рис. 84

Радиус сферы $(MABC)$ равен ΩA:

$$\Omega A^2=OA^2+O\Omega^2.$$

Но OA — медиана прямоугольного треугольника ABC и она равна половине гипотенузы BC, значит,

$$OA^2=\frac{BC^2}{4}=\frac{AB^2+AC^2}{4}=\frac{9a^2+16a^2}{4}=\frac{25a^2}{4},$$

---

* Символом (ABC) мы будем иногда обозначать окружность, проходящую через точки A, B и C. Осью окружности называется прямая, проходящая через центр окружности перпендикулярно плоскости, в которой расположена эта окружность.

** $(MABC)$ — сфера, проходящая через точки M, A, B, C.

а так как

$$O\Omega = AI = \frac{x}{2},$$

то окончательно

$$R^2 = \Omega A^2 = \frac{25a^2}{4} + \frac{x^2}{4},$$

откуда

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{25a^2 + x^2}.$$

2°. **Геометрическое место проекций точки B на прямую CM при условии, что x изменяется.** Пусть B' — проекция точки B на прямую CM. Так как $BB' \perp CM$ и $AB \perp CM$, то прямая CM перпендикулярна плоскости ABB', значит, $CM \perp AB'$ (рис. 85).

Таким образом, B' есть проекция точки A на переменную прямую CM; $\angle CAB = 90°$, а точка B' лежит на окружности, лежащей в плоскости CAM и построенной на AC, как на диаметре. Точка B'

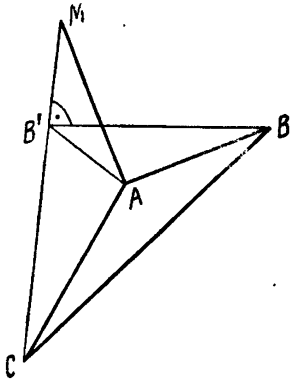

Рис. 85

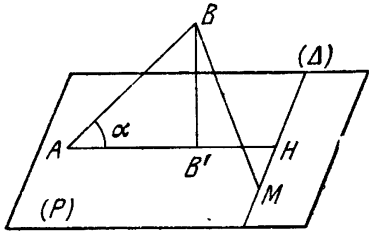

Рис. 86

описывает эту окружность целиком при условии, что точка M описывает целиком прямую (D); в самом деле, любая прямая AM имеет с окружностью S общую точку B'.

5. Дана плоскость (P) и две точки A и B. Точка A лежит на плоскости (P), точка B не лежит на этой плоскости. Дан угол α прямой AB с плоскостью (P).

Найти на плоскости (P) точки M, такие, что $\triangle ABM$ равнобедренный и прямоугольный ($\angle ABM = 90°$).

Исследовать число решений в зависимости от значений α.

Решение. Угол B треугольника ABM прямой тогда и только тогда, когда точка M лежит в плоскости (П) на прямой, проходящей через точку B перпендикулярно прямой AB (рис. 86). С другой стороны, точка M должна лежать на плоскости (P), значит,

она должна лежать на прямой (Δ), по которой пересекаются плоскости (П) и (P) $\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$. В плоскости (П) лежит перпендикуляр BH к прямой AB, проведенный в плоскости, определяемой прямой AB и ее проекцией AB' на плоскость (P). Прямая (Δ) перпендикулярна AB (так как она лежит в плоскости (П), перпендикулярной AB) и ортогональна BB' (так как (Δ) лежит в плоскости (P)). Значит, прямая (Δ) перпендикулярна плоскости ABB' и $(\Delta)\perp AB'$. Значит, (Δ) есть прямая, лежащая в плоскости (P) и перпендикулярная AH.

Треугольник ABM будет равнобедренным, если $AM=AB\sqrt{2}$. т. е. если точка M лежит на окружности (C) плоскости (P) с центром A и радиусом

$$R=AB\sqrt{2}.$$

Так как

$$AH=\frac{AB}{\cos\alpha},$$

то приходим к следующим заключениям.

Если $R<AH$, т. е. $\sqrt{2}<\frac{1}{\cos\alpha}$, или $\cos\alpha<\frac{1}{\sqrt{2}}$, или, наконец, $\alpha>\frac{\pi}{4}$, то окружность (C) не имеет общих точек с прямой (Δ); задача не имеет ни одного решения.

Если $R=AH$, т. е. $\alpha=\frac{\pi}{4}$, то окружность (C) касается прямой (Δ) в точке H; существует только одна точка M (совпадающая с H), удовлетворяющая условию задачи.

Если $R>AH$, т. е. $\alpha<\frac{\pi}{4}$, то окружность (C) пересекает прямую (Δ) в двух точках; задача имеет два решения.

XIX. Задачи по стереометрии для самостоятельного решения (без применения тригонометрии)

1. В плоскости π расположен равносторонний треугольник ABC со стороной a. На перпендикуляре и плоскости π в точке A отложен отрезок $AD=2a$. Определить положение центра Ω и радиус R сферы, описанной вокруг пирамиды $ABCD$.

Ответ. Точка Ω находится на луче Oz, выходящем из центра O треугольника ABC в направлении луча $\vec{AD}$; $R=\frac{2a}{\sqrt{3}}$.

2. Дан шар радиуса R. Вычислить объем сферического слоя, заключенного между двумя параллельными плоскостями, одна из

которых проходит через центр шара, а другая делит пополам радиус сферы, перпендикулярный к первой плоскости.

Ответ. $\frac{11}{24}\pi R^3$.

3. Рассмотрим тетраэдр $ABCD$. Пусть I — середина ребра AD, J — середина ребра BC, K — середина ребра AB и L — середина ребра CD. Доказать, что $AC=BD$ тогда и только тогда, когда $KL \perp IJ$.

4. (P) и (Q) — две взаимно перпендикулярные плоскости. Пусть A и B — две произвольные точки, лежащие на линии их пересечения. Возьмем на плоскости P точку, такую, что $\angle ABC=\frac{\pi}{2}$. В плоскости (Q) на отрезке AB, как на диаметре, построим окружность. Пусть D — произвольная точка этой окружности, отличная от точек A и B. Доказать, что треугольники CBD, ADB и ADC прямоугольные.

5. Ребро правильного тетраэдра $ABCD$ равно b. Найти радиус шара, вписанного в трехгранный угол, образованный гранями тетраэдра с вершиной в точке A, и касающегося плоскости, проведенной через середины ребер AB, AD и BC.

6. В основании прямоугольного параллелепипеда лежит квадрат со стороной b, а высота параллелепипеда равна $\frac{5}{4}b$. Найти радиус сферы, проходящей через концы стороны AB основания и касающейся граней параллелепипеда, параллельных AB.

7. В треугольной пирамиде три грани взаимно перпендикулярны и их площади равны S_1, S_2, S_3. Найти площадь четвертой грани.

8. В прямой круговой конус с высотой h и радиусом основания $2h$ вписан шар. Найти площадь сечения этого шара плоскостью, проходящей через вершину конуса под углом $\frac{\pi}{4}$ к его оси.

Ответ. $\frac{3h^2}{2(9+4\sqrt{5})}$.

9. Ребро куба $ABCDA'B'C'D'$ равно a. Найти радиус сферы, проходящей через середины ребер AA', BB' и через вершины A и C'.

10. В правильную треугольную усеченную пирамиду с боковым ребром l можно поместить шар, касающийся всех граней, и шар, касающийся всех ребер пирамиды. Найти длины сторон оснований пирамиды.

11. В треугольной призме $ABCA'B'C'$ боковое ребро равно l. В основании призмы лежит правильный треугольник со стороной b, а прямая, проходящая через вершину B' и центр основания ABC, перпендикулярна основаниям. Найти площадь сечения, проходящего через ребро BC и середину ребра AA'.

Ответ. $\frac{b}{8}\sqrt{15b^2+4l^2}$.

12. В основании прямой треугольной призмы лежит равнобедренный прямоугольный треугольник, гипотенуза которого равна c. Через гипотенезу нижнего основания проведена плоскость так, что в сечении призмы получился равносторонний треугольник. Известно, что можно вписать шар, касающийся боковых граней призмы, верхнего основания и сечения. Найти объем призмы.

Ответ. $\frac{c^3}{8}(1+\sqrt{6}-\sqrt{3}-\sqrt{2})$.

13. В тетраэдре $ABCD$ $AB=6$, $CD=8$, остальные ребра равны $\sqrt{74}$. Найти радиус описанного шара.

14. Два шара радиуса r и два одинаковых шара неизвестного радиуса расположены так, что каждый шар касается трех других и данной плоскости. Найти радиусы двух последних шаров.

15. Ребро куба равно a. Найти радиус сферы, проходящей через вершины нижнего основания куба и касающейся ребер верхнего его основания.

16. Диаметр шара является высотой правильного тетраэдра с ребром a. Найти площадь поверхности тетраэдра, лежащей внутри шара.

17. Около конуса с высотой 2 описана правильная треугольная пирамида, сторона основания которой равна $3\sqrt{3}$. Найти радиус шара, вписанного в трехгранный угол при основании пирамиды и касающегося боковой поверхности конуса.

18. Ребро куба равно b. Найти объем конуса, у которого вершина совпадает с вершиной A куба, а окружность основания проходит через центры граней куба, не проходящих через вершину A.

Ответ. $\frac{\pi b^3}{9\sqrt{3}}$.

XX. Задачи по тригонометрии с решениями

1. 1°. Найти три натуральных числа a, b, c при условии, что число a не является точным квадратом и что существует острый угол α, такой, что

$$\cos\alpha=\frac{\sqrt{a}+b}{c},\quad \cos 2\alpha=\frac{\sqrt{a}-b}{c}.$$

Вычислить величину этого острого угла α.

2°. Доказать, что для острого угла α, определенного в 1°, выполняются соотношения (для любого натурального n):

$$\cos(2^{2n}\alpha)=-\frac{\sqrt{a}+b}{c},\quad \cos(2^{2n+1}\alpha)=\frac{\sqrt{a}-b}{c}.$$

Вывести отсюда соотношения

$$\cos 2\alpha\cos 4\alpha\cos 6\alpha\cos 8\alpha=\frac{1}{16}$$

и

$$\cos 2\alpha + \cos 4\alpha + \cos 6\alpha + \cos 8\alpha = -1.$$

1°. **Определение a, b, c.** Имеем

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = \frac{2(a + b^2 + 2b\sqrt{a})}{c^2} - 1 =$$

$$= \frac{2(a + b^2) - c^2 + 4b\sqrt{a}}{c^2},$$

и мы должны иметь

$$\frac{2(a + b^2) - c^2 + 4b\sqrt{a}}{c^2} = \frac{\sqrt{a} - b}{c},$$

или

$$(c - 4b)\sqrt{a} = 2(a + b^2) - c^2 + bc.$$

Так как $\sqrt{a}$ — число иррациональное, а числа a, b, c натуральные, то последнее равенство возможно тогда и только тогда, когда

$$c - 4b = 0,$$

$$2(a + b^2) - c^2 + bc = 0;$$

отсюда

$$c = 4b, \quad a = 5b^2$$

и, следовательно,

$$\cos \alpha = \frac{b\sqrt{5} + b}{4b} = \frac{\sqrt{5} + 1}{4},$$

$$\cos 2\alpha = \frac{b\sqrt{5} - b}{4b} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}.$$

Вычисление α. Находим

$$\cos 4\alpha = 2\cos^2 2\alpha - 1 = \frac{2(6 - 2\sqrt{5})}{16} - 1 = -\frac{\sqrt{5} + 1}{4}.$$

Таким образом,

$$\cos 4\alpha = -\cos \alpha = \cos(\pi - \alpha).$$

Отсюда либо $4\alpha = \pi - \alpha + 2k\pi$, т. е, $\alpha = \frac{\pi}{5} + \frac{2k\pi}{5}$,

либо

$$4\alpha = -(\pi - \alpha) + 2k'\pi,$$

т. е.

$$\alpha = -\frac{\pi}{3} + \frac{2k'\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + \frac{2k''\pi}{3}.$$

Так как, с другой стороны, α острый угол, то или $\alpha = \frac{\pi}{5} = 36°$, или $\alpha = \frac{\pi}{3} = 60°$. Но это последнее значение α должно быть отброшено, так как

$$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \neq \frac{\sqrt{5}+1}{4}.$$

2°. **Доказательство соотношений $\cos(\alpha \cdot 2^{2n}) = -\cos\alpha$ и $\cos(\alpha \cdot 2^{2n+1}) = \cos 2\alpha$.** Надо доказать, что для любого натурального n справедливы равенства

$$\cos\left(\frac{\pi}{5} \cdot 2^{2n}\right) = -\frac{\sqrt{5}+1}{4} \quad \text{и} \quad \cos\left(\frac{\pi}{5} \cdot 2^{2n+1}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

Равенства легко проверить: они верны, если $n=1$ и $n=2$, а затем провести метод полной индукции. Но можно доказать эти соотношения и непосредственно.

Заметим сначала, что $2^{2n} - (-1)^n$ и $2^{2n+1} - 2(-1)^n$ при любом натуральном n делятся на 5. В самом деле, это верно, если $n = 1$.

Далее,

$$2^{2n+2} - (-1)^{n+1} = 2 \cdot 2^{2n+1} - 4(-1)^n + 4(-1)^n + (-1)^n =$$
$$= 2[2^{2n+1} - 2(-1)^n] + 5(-1)^n$$

делится на 5;

$$2^{2n+3} - 2(-1)^{n+1} = 8 \cdot 2^{2n} - 8(-1)^n + 8(-1)^n + 2(-1)^n =$$
$$= 8[2^{2n} - (-1)^n] + 10(-1)^n$$

делится на 5.

Но так как числа 2^{2n} и 2^{2n+1} четные, то

$$2^{2n} = (-1)^n + 5(2k+1),$$
$$2^{2n+1} = (-1)^n \cdot 2 + 5 \cdot 2k'.$$

Из последних равенств следует, что

$$2^{2n} \cdot \frac{\pi}{5} = (-1)^n \frac{\pi}{5} + (2k+1)\pi,$$

$$2^{2n+1} \frac{\pi}{5} = (-1)^n \frac{2\pi}{5} + 2k'\pi,$$

откуда

$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\cdot 2^{2n}\right)=-\cos\left[(-1)^n\frac{\pi}{5}\right]=-\cos\frac{\pi}{5}=-\frac{\sqrt{5}+1}{4},$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\cdot 2^{2n+1}\right)=\cos\left[(-1)^n\frac{2\pi}{5}\right]=\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

Примечание. Для $\alpha=\frac{\pi}{5}$ имеем

$$\cos 2\alpha=\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{\sqrt{5}-1}{4},$$

$$\cos 4\alpha=\cos 2^2\frac{\pi}{5}=-\frac{\sqrt{5}+1}{4},$$

$$\cos 6\alpha=\cos\left(\frac{6\pi}{5}+\frac{10\pi}{5}\right)=\cos 2^4\frac{\pi}{5}=-\frac{\sqrt{5}+1}{4},$$

$$\cos 8\alpha=\cos\frac{8\pi}{5}=\cos 2^3\frac{\pi}{5}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

Следовательно,

$$\cos 2\alpha\cos 4\alpha\cos 6\alpha\cos 8\alpha=$$

$$=\frac{\sqrt{5}-1}{4}\,\frac{\sqrt{5}+1}{4}\,\frac{\sqrt{5}+1}{4}\,\frac{\sqrt{5}-1}{4}=\frac{1}{16}$$

и, далее,

$$\cos 2\alpha+\cos 4\alpha+\cos 6\alpha+\cos 8\alpha=$$

$$=\frac{\sqrt{5}-1}{4}-\frac{\sqrt{5}+1}{4}-\frac{\sqrt{5}+1}{4}+\frac{\sqrt{5}-1}{4}=-1.$$

XXI. Задачи по тригонометрии для самостоятельного решения

1. Доказать, что $\sin(\alpha+2\beta)=\sin\alpha$, если $\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=0$.
Указание. Представить $\alpha+2\beta=2(\alpha+\beta)-\alpha$.

2. Доказать, что

$$\cos\frac{\pi}{5}-\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{1}{2}.$$

3. Доказать тождество

$$\sin a+\sin b+\sin c-\sin(a+b+c)=$$

$$=4\sin\frac{b+c}{2}\sin\frac{c+a}{2}\sin\frac{a+b}{2}.$$

Указание. Сгруппировать левую часть попарно.

4. Доказать, что если $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, то имеет место тождество $\sin 2n\alpha+\sin 2n\beta+\sin 2n\gamma=(-1)^{n+1}\cdot 4\sin n\alpha \sin n\beta \sin n\gamma$, где n — целое число.

Указание. Заменив $\gamma=\pi-(\alpha+\beta)$ и преобразовав левую часть в произведение, заменить снова $\alpha+\beta=\pi-\gamma$ и применить формулы приведения.

5. Пусть $x+y+z=\frac{k\pi}{2}$. Для каких целых значений k сумма $\operatorname{tg} x\operatorname{tg} y+\operatorname{tg} y\operatorname{tg} z+\operatorname{tg} z\operatorname{tg} x$ не будет зависеть от x, y, z?

Указание. Рассмотреть отдельно $k=2k'$ и $k=2k'+1$. В первом случае легко убедиться, что при $x=y=0$, $z=k'\pi$ и при $x=y=\frac{\pi}{3}$, $z=k\pi-\frac{2\pi}{3}$ выражение принимает различные значения.

6. Доказать формулы:

$$\left.\begin{array}{l} \text{a) } \sin \operatorname{arc}\cos x=\sqrt{1-x^2} \\ \text{b) } \cos \operatorname{arc}\sin x=\sqrt{1-x^2} \\ \text{c) } \operatorname{arc}\sin x+\operatorname{arc}\cos x=\frac{\pi}{2} \end{array}\right\}, \quad -1\leqslant x\leqslant 1.$$

7. Доказать, что если $0<x<1$ и $\alpha=2\operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x}$,

$$\beta=\operatorname{arc}\sin\frac{1-x^2}{1+x^2}, \text{ то } \alpha+\beta=\pi.$$

8. Упростить выражения:

$$y=\cos x+\cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(x+\frac{4\pi}{3}\right),$$

$$z=\sin x+\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(x+\frac{4\pi}{3}\right).$$

Ответ. $y=0$, $z=0$.

9. Решить уравнение

$$\sin^3\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin x.$$

10. Решить уравнение

$$4\sin x\cos^2 x=\operatorname{cosec} x-\sin x-\cos x.$$

11. Решить уравнение

$$\sin 4x\left[2+\operatorname{ctg} x+\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right]=2\sqrt{2}\,(1+\sin 2x+\cos 2x).$$

12. Решить уравнение

$$2 + \cos 4x = 5\cos 2x + 8\sin^6 x.$$

Ответ. $\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} + k\pi$.

13. Решить уравнение

$$1 + 2\cos x(1 + \sin 2x) = (\sin 2x - \cos 2x).$$

14. Решить уравнение

$$35 + 3\cos 4x - 12\sin^2 2x - 32\cos^2 x = 32\sin^6 x.$$

15. Решить уравнение

$$2 + 4\cos 4x = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x.$$

Ответ. $\frac{\pi}{12} + \frac{n\pi}{3}$.

16. Решить уравнение

$$\sin^3 x + \cos^3 x + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2x \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos x + \sin 3x.$$

Ответ. $\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $k\pi$.

17. Решить уравнение

$$\sin^2 x + \cos^2 2x = \sin^2 3x + \cos^2 4x.$$

Ответ. $\frac{k\pi}{2}$, $\frac{\pi}{10} + \frac{k\pi}{5}$.

18. Решить уравнение

$$\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} 3x = \operatorname{tg} 2x.$$

Ответ. $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$, $k\pi \pm \operatorname{arctg}\sqrt{2}$.

19. Решить уравнение

$$4\cos x - 2\cos 2x - \cos 4x = 1.$$

20. Решить уравнение

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\operatorname{tg}^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{ctg} x - 2\operatorname{tg} 2x.$$

21. Решить уравнение

$$1 + \sin 3x = \cos 2x + \sin x.$$

22. Решить уравнение

$$\sin 3x + \sin^3 x + \sin 2x = 0.$$

23. Решить уравнение

$$2\sin 3x + 2\sin 2x + \sin x = 0.$$

24. Решить уравнение

$$\operatorname{ctg}^2 x = \frac{1+\sin x}{1-\sin x}.$$

Указание. Ограничив множество допустимых значений неравенством $\sin x \neq 0$, перейти к уравнению относительно $\sin x$ и $\cos x$. Заметить, что

$$2\sin x \cos x = (\sin x + \cos x)^2 - 1.$$

25. Решить уравнение

$$\sin^3 x + \cos^3 x = 1 - \frac{1}{2}\sin 2x.$$

Указание. Разложить на множители левую часть.

26. Решить уравнение

$$\sin 2x - 12(\sin x - \cos x) + 12 = 0.$$

Указание. Заметить, что $\sin 2x = 1 - (\sin x - \cos x)^2$.

27. Решить уравнение

$$\cos 7x - \sin 5x = \sqrt{3}(\cos 5x - \sin 7x).$$

Указание. Сгруппировать $\cos 7x$ и $\sin 7x$; $\cos 5x$ и $\sin 5x$; ввести вспомогательные углы.

28. Решить уравнение

$$\sin^4 \frac{x}{3} + \cos^4 \frac{x}{3} = \frac{5}{8}.$$

Указание. Заметить, что

$$\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha =$$

$$= 1 - 2\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\alpha.$$

29. Решить уравнение

$$\frac{\sin x}{\sin a} + \frac{\cos x}{\cos a} = 2,$$

$$\sin a \neq 0, \quad \cos a \neq 0.$$

Ответ. $x = a + 2k\pi$, $x = 2k\pi + \pi - 3a$, где k принимает все целые числовые значения.

30. Решить уравнение

$$x^4 \cos^2 a - 2x^2 (1 + \sin a \cos b) + \sin^2 b = 0,$$

где a и b — параметры, а x — неизвестное.

Ответ. 1) Уравнение обращается в тождество, если $a = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $b = \pi + 2s\pi$, где k и s — любые целые числа.

2) Уравнение обращается в тождество, если $a = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $b = 2s\pi$, где k и s — любые целые числа.

3) Если $a = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, где k — любое целое число, но $b \neq \pi + 2s\pi$ при всех целых числах s, то уравнение имеет два корня: $x_{1,2} = \pm \sin \frac{b}{2}$.

4) Если $a = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, где k — любое целое число, но $b \neq 2s\pi$ при целых числах s, то уравнение имеет два корня: $x_{1,2} = \pm \cos \frac{b}{2}$.

5) Если $a \neq 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$, где k — любое целое число, то уравнение имеет четыре корня:

$$x_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{2} \cos \frac{b}{2}}{\cos \frac{a}{2} - \sin \frac{a}{2}}, \quad x_{3,4} = \pm \frac{\sqrt{2} \sin \frac{b}{2}}{\cos \frac{a}{2} + \sin \frac{a}{2}}.$$

31. Дано уравнение

$$2x^2 - 2(2\cos \alpha - 1)x + 2\cos^2 \alpha - 5\cos \alpha + 2 = 0,$$

причем α изменяется на сегменте $[0, \pi]$. Для каких значений α из этого сегмента данное уравнение имеет два различных и действительных корня. Исследовать их знаки.

Ответ. $0 \leqslant \alpha < \frac{\pi}{3}$; корни разных знаков.

32. Решить неравенство

$$\sin x - \sqrt{3} \cos x > \sqrt{2}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi.$$

Ответ. $\frac{7\pi}{12} < x < \frac{13\pi}{12}$.

33. Решить неравенство

$$\cos^3 x \cos 3x - \sin^3 x \sin 3x > \frac{5}{8}.$$

Указание. Представив $\cos^3 x = \cos x(1 - \sin^2 x)$ и $\sin^3 x = \sin x(1 - \cos^2 x)$, выразить левую часть через $\cos 4x$ и решить неравенство относительно $\cos 4x$.

34. Решить неравенство

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} > \frac{\operatorname{tg} x - 2}{\operatorname{tg} x + 2}.$$

Указание. Решить неравенство относительно $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

35. Решить систему уравнений

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 1,$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Указание. Разложив на множители $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y$, найти $\sin(x+y)$ и выразить y через x.

36. Решить систему уравнений

$$x + y = \beta,$$

$$\cos x \cos y = a.$$

Указание. Разложить $\cos x \cos y$ в сумму и найти $\cos(x - y)$.

37. Решить систему уравнений

$$\sin x + \sin y = \sin(x + y),$$

$$|x| + |y| = 1.$$

Указание. Перенести $\sin(x+y)$ в левую часть, разложить выражение на множители и подставить найденные решения во второе уравнение. Исключить посторонние решения первого уравнения.

38. Решить систему уравнений

$$\cos^2 y + 3 \sin x \sin y = 0,$$

$$21 \cos 2x - \cos^2 2y = 10.$$

39. Решить систему уравнений

$$x \sin^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = y \cos^2\left(y + \frac{\pi}{6}\right),$$

$$x \cos^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = y \sin^2\left(y + \frac{\pi}{6}\right).$$

40. Решить систему уравнений

$$\sin x + \sin y = \frac{3}{2},$$

$$\cos x + \cos y = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

41. Решить систему

$$2^{\sin x+\cos y}=2,$$

$$16^{\sin^2 x+\cos^2 y}=4.$$

42. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$\varphi(x)=\sin^6 x+\cos^6 x.$$

Ответ. $\varphi_{\max}=1$, $\varphi_{\min}=\frac{1}{4}$.

43. Найти все значения μ, при которых уравнение

$$\sec x+\operatorname{cosec} x=\mu$$

имеет корень x, удовлетворяющий неравенству $0<x<\frac{\pi}{2}$.

Ответ. $\mu\geqslant 2\sqrt{2}$.

44. Найти соотношения между $\alpha=\arcsin\cos\arcsin x$ и $\beta=\arccos\sin\arccos x$.

Ответ. $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$.

45. Доказать, что $\cos\sqrt{x}$ непериодическая функция.

XXII. Задачи по планиметрии с применением тригонометрии (с решениями)

1. Доказать, что если a, b, c соответственно длины сторон BC, CA и AB треугольника ABC, углы которого A, B, C, то

$$\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)\cos A+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)\cos B+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\cos C=3.$$

Решение. Первый способ.

$$\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)\cos A+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)\cos B+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\cos C=$$

$$=\frac{1}{a}(b\cos C+c\cos B)+\frac{1}{b}(c\cos A+a\cos C)+$$

$$+\frac{1}{c}(a\cos B+b\cos A). \qquad (1)$$

Но

$$b\cos C+c\cos B=a,$$

$$c\cos A+a\cos C=b,$$

$$a\cos B+b\cos A=c,$$

поэтому сумма (1) равна 3.

Второй способ. Так как стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов, то

$$\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)\cos A+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)\cos B+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\cos C=$$

$$=\left(\frac{\sin B}{\sin C}+\frac{\sin C}{\sin B}\right)\cos A+\left(\frac{\sin C}{\sin A}+\frac{\sin A}{\sin C}\right)\cos B+$$

$$+\left(\frac{\sin A}{\sin B}+\frac{\sin B}{\sin A}\right)\cos C=$$

$$=\frac{1}{\sin A}(\sin B\cos C+\sin C\cos B)+$$

$$+\frac{1}{\sin B}(\sin C\cos A+\sin A\cos C)+$$

$$+\frac{1}{\sin C}(\sin A\cos B+\sin B\cos A)=$$

$$=\frac{\sin(B+C)}{\sin A}+\frac{\sin(C+A)}{\sin B}+\frac{\sin(A+B)}{\sin C}. \qquad (2)$$

В силу соотношения $A+B+C=\pi$ каждая из дробей, стоящих в правой части равенства (2), равна 1, а потому их сумма равна 3.

2. ABC — произвольный треугольник, O — центр описанной окружности, H — его ортоцентр (точка пересечения высот).

1°. Доказать, что

$$OH^2=9R^2-(a^2+b^2+c^2),$$

где R — радиус описанной окружности, а a, b, c — длины сторон треугольника ABC:

$$BC=a,\ CA=b,\ AB=c.$$

2°. Доказать, что

$$OH^2=R^2(1-8\cos A\cos B\cos C).$$

3°. Доказать, что треугольник ABC прямоугольный тогда и только тогда, когда $OH=R$.

4°. Доказать, что

$$AH=2R|\cos A|,\ BH=2R|\cos B|,\ CH=2R|\cos C|.$$

5°. Вычислить угол OAH через углы A, B, C треугольника ABC.

6°. Вычислить углы треугольника, если $OH=2R$ и $AO\perp AH$. Построить такой треугольник.

Решение. 1°. Применяя соотношение

$$MA^2+MB^2+MC^2=3MG^2+\frac{a^2+b^2+c^2}{3},$$

где M — произвольная точка плоскости, а G — точка пересечения медиан треугольника ABC, и считая, что точка M совпадает с центром O описанной окружности, находим

$$3R^2 = 3OG^2 + \frac{a^2+b^2+c^2}{3}.$$

Но точки O, G, H всегда принадлежат одной прямой, причем

$$\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}.$$

Значит, из последнего соотношения находим

$$3R^2 = \frac{OH^2}{3} + \frac{a^2+b^2+c^2}{3},$$

поэтому

$$OH^2 = 9R^2 - (a^2+b^2+c^2).$$

2°. Замечая, что $a=2R\sin A$, $b=2R\sin B$, $c=2R\sin C$, из предыдущего пункта находим

$$OH^2 = 9R^2 - 4R^2(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C).$$

Это выражение для OH^2 можно преобразовать к виду

$$OH^2 = R^2(1 - 8\cos A\cos B\cos C)$$

(следует учесть, что $A+B+C=\pi$).

3°. Если $OH=R$, то $\cos A\cos B\cos C=0$, и обратно.

4°. Пусть M — середина BC. Тогда $AH=2OM$, значит,

$$AH = 2\sqrt{OB^2 - BM^2} = 2\sqrt{R^2 - \frac{BC^2}{4}} =$$

$$= 2\sqrt{R^2 - R^2\sin^2 A} = 2R|\cos A| \text{ и т. д.}$$

5°. Из треугольника OAH имеем

$$OH^2 = OA^2 + AH^2 - 2OA\cdot AH\cdot\cos OAH,$$

или

$$R^2(1 - 8\cos A\cos B\cos C) = R^2 + 4R^2\cos^2 A - 2R\cdot 2R|\cos A|\cos\theta,$$

где $\theta = \angle OAH$.

Упрощая, получим

$$|\cos A|\cos\theta = \cos^2 A + 2\cos A\cos B\cos C.$$

Но

$$2\cos B\cos C = \cos(B+C) + \cos(B-C) = -\cos A + \cos(B-C),$$

поэтому

$$|\cos A|\cos\theta = \cos A\cos(B-C).$$

Если $0<A<\frac{\pi}{2}$, то

$$\cos\theta = \cos(B-C),$$

и считая, что $B\geqslant C$, находим $\theta=B-C$.

Если $\frac{\pi}{2}<A<\pi$, то

$$\cos\theta = -\cos(B-C) = \cos[\pi-(B-C)],$$

значит,

$$\theta = \pi-(B-C)$$

(опять считаем, что $B\geqslant C$).

Замечание. Если $A=\frac{\pi}{2}$, то $AH=0$, и угол OAH не определен.

6°. Если $OH=2R$ и $AO\perp AH$, то $A\neq\frac{\pi}{2}$, так как в противном случае точка H совпадала бы с точкой A, точка O совпадала бы с серединой отрезка BC, и мы имели бы $OH=R$.

Так как $\angle OAH=90°$, то на основании пункта 5° $\cos(B-C)=0$, откуда $(B\geqslant C)$

$$B-C=\frac{\pi}{2}.$$

(треугольники, обладающие этим свойством, называют тогда *квази*прямоугольными).

С другой стороны, если $OH=2R$, то

$$1-8\cos A\cos B\cos C = 4,$$

$$8\cos A\cos B\cos C = -3,$$

$$4\cos A[\cos(B+C)+\cos(B-C)] = -3,$$

и так как $\cos(B-C)=0$, а $\cos A=-\cos(B+C)$, то

$$\cos^2(B+C)=\frac{3}{4},\quad \cos(B+C)=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Но

$$B+C>B-C=\frac{\pi}{2},$$

значит,

$$\cos(B+C) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

и потому

$$B+C = \frac{5\pi}{6}.$$

Окончательно находим

$$B = \frac{2\pi}{3},\ A = C = \frac{\pi}{6}.$$

Построение треугольника не представляет затруднений.

3. На плоскости даны две оси Ox и Oy, такие, что угол от оси Ox до оси Oy, отсчитываемый в положительном направлении (против часовой стрелки), равен $+\frac{\pi}{3}$. Через точку A, лежащую на оси Ox и имеющую положительную абсциссу a, проводится прямая, параллельная оси Oy. Переменная окружность (C), касающаяся в точке A оси Ox, пересекает вторично эту прямую в точке M. Обозначим через φ угол от направленного отрезка $\overrightarrow{OA}$ до направленного отрезка $\overrightarrow{OM}$ и будем брать для φ только значения из интервала $-\frac{2\pi}{3} < \varphi < \frac{\pi}{3}$. Прямая OM вторично пересекает окружность (C) в точке P.

1°. Вычислить углы треугольника APM в функции φ (рассмотреть два случая: $\varphi > 0$, $\varphi < 0$). Вычислить OM, OP, AM, AP и радиус R окружности (C) в функции a и φ.

Определить φ, если $OP = OM$.

Выразить через a и R тангенс угла OAP.

2°. Изучить функцию от φ:

$$y = OP + AP$$

при условии, что φ изменяется в интервале $\left(-\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$.

3°. Решить аналитически и исследовать уравнение

$$OP + AP = \frac{2ak}{\sqrt{3}},$$

где k — параметр.

Подтвердить правильность результатов при помощи графика функции $y = OP + AP$ (см. 2°).

1°. **Вычисление углов треугольника *APM*.** Рассмотрим различные случаи для значений φ.

Если $0 < \varphi < \frac{\pi}{3}$ (рис. 87), то

$$\widehat{APM} = \widehat{xAM} = \frac{\pi}{3},$$

$$\widehat{AMP} = \widehat{xAM} - \varphi = \frac{\pi}{3} - \varphi$$

и

$$\widehat{PAM} = \frac{\pi}{3} + \varphi.$$

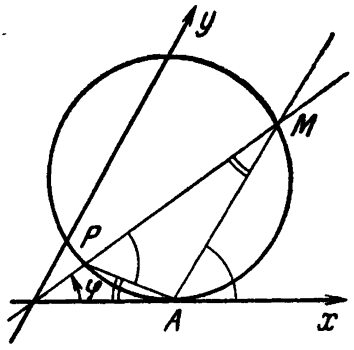

Рис. 87

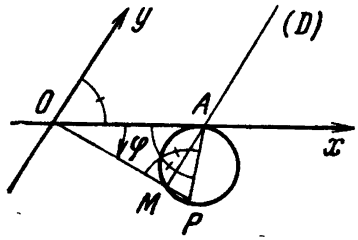

Рис. 88

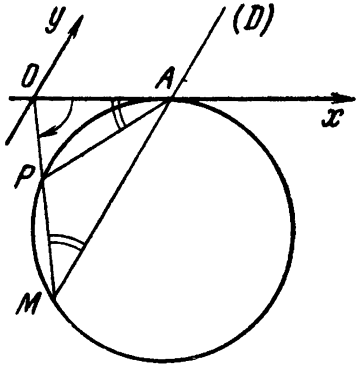

Рис. 89

Если $-\frac{\pi}{3} < \varphi < 0$ (рис. 88), то

$$\widehat{APM} = \widehat{OAM} = \frac{\pi}{3},$$

$$\widehat{AMP} = \frac{\pi}{3} - \varphi$$

и

$$\widehat{PAM} = \frac{\pi}{3} + \varphi.$$

Если $-\frac{2\pi}{3} < \varphi < -\frac{\pi}{3}$ (рис. 89), то

$$\widehat{APM} = \frac{2\pi}{3},$$

$$\widehat{AMP} = \frac{2\pi}{3} + \varphi$$

и

$$\widehat{PAM} = -\left(\frac{\pi}{3} + \varphi\right).$$

Окончательно, если

$$-\frac{\pi}{3} < \varphi < \frac{\pi}{3},$$

то

$$\widehat{APM} = \frac{\pi}{3},$$

$$\widehat{AMP} = \frac{\pi}{3} - \varphi,$$

$$\widehat{PAM} = \frac{\pi}{3} + \varphi;$$

если

$$-\frac{2\pi}{3} < \varphi < -\frac{\pi}{3},$$

то

$$\widehat{APM} = \frac{2\pi}{3},$$

$$\widehat{AMP} = \frac{2\pi}{3} + \varphi,$$

$$\widehat{PAM} = -\left(\frac{\pi}{3} + \varphi\right).$$

Замечание. Если $\varphi=0$, то точки P и M совпадают с точкой A, а если $\varphi=-\frac{\pi}{3}$, то точки P и M совпадают; прямая OM в этом случае касается окружности (C) и треугольник OAM — равносторонний.

Вычисление OM, OP, AM, AP и R. Во всех случаях (рис. 87—89) из треугольника OAM находим

$$\frac{OM}{\sin\frac{2\pi}{3}}=\frac{AM}{|\sin\varphi|}=\frac{OA}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\varphi\right)},$$

откуда

$$OM=\frac{a\sqrt{3}}{2\sin\left(\frac{\pi}{3}-\varphi\right)}=\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cos\varphi-\sin\varphi}$$

и

$$AM=\frac{a|\sin\varphi|}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\varphi\right)}=\frac{2a|\sin\varphi|}{\sqrt{3}\cos\varphi-\sin\varphi}.$$

Далее, так как $OM\cdot OP=a^2$, то

$$OP=\frac{2a\sqrt{3}}{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}-\varphi\right),$$

а так как (из треугольника OAP)

$$\frac{AP}{|\sin\varphi|}=\frac{OA}{\sin\frac{\pi}{3}},$$

то

$$AP=\frac{2a\sqrt{3}}{3}|\sin\varphi|.$$

Наконец, из треугольника AMP во всех случаях имеем

$$2R=\frac{AM}{\sin\frac{\pi}{3}},$$

откуда

$$R=\frac{AM\sqrt{3}}{3}=\frac{a\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{|\sin\varphi|}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\varphi\right)}=\frac{2a\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{|\sin\varphi|}{\sqrt{3}\cos\varphi-\sin\varphi}.$$

Вычисление φ в случае $OP=OM$. Имеем

$$\frac{2a\sqrt{3}}{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}-\varphi\right)=\frac{a\sqrt{3}}{2}\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\varphi\right)},$$

откуда

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{3}-\varphi\right)=\frac{3}{4}.$$

Но $0<\frac{\pi}{3}-\varphi<\pi$, поэтому $\sin\left(\frac{\pi}{3}-\varphi\right)>0$, и из последнего уравнения находим

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}-\varphi\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin\frac{\pi}{3},$$

следовательно, или $\varphi=0$ (результат, не представляющий интереса), или $\varphi=-\frac{\pi}{3}$. Таким образом, в этом случае $\left(\varphi=-\frac{\pi}{3}\right)$ прямая OM касается окружности (C) (результат, который легко можно было предвидеть).

Вычисление tg $\widehat{OAP}$. В случае рис. 87 имеем

$$\operatorname{tg}\widehat{OAP}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-\varphi\right)=\frac{\sqrt{3}-\operatorname{tg}\varphi}{1+\sqrt{3}\operatorname{tg}\varphi},$$

и так как

$$R=\frac{2a\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sin\varphi}{\sqrt{3}\cos\varphi-\sin\varphi}=\frac{2a\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{3}-\operatorname{tg}\varphi},$$

то

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{3R\sqrt{3}}{3R+2a\sqrt{3}},$$

а значит,

$$\operatorname{tg}\widehat{OAP}=\frac{\sqrt{3}(3R+2a\sqrt{3})-3R\sqrt{3}}{3R+2a\sqrt{3}+9R}=\frac{3a}{6R+a\sqrt{3}}.$$

В случае $-\frac{\pi}{3}<\varphi<0$ (рис. 88) имеем

$$\operatorname{tg}\widehat{OAP}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-\varphi\right)=\frac{\sqrt{3}-\operatorname{tg}\varphi}{1+\sqrt{3}\operatorname{tg}\varphi},$$

но теперь

$$R=-\frac{2a\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sin\varphi}{\sqrt{3}\cos\varphi-\sin\varphi}=-\frac{2a\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{3}-\operatorname{tg}\varphi},$$

откуда

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{3R\sqrt{3}}{3R-2a\sqrt{3}},$$

и, значит,

$$\operatorname{tg}\widehat{OAP}=\frac{3a}{6R-a\sqrt{3}}.$$

Наконец, в случае $-\frac{2\pi}{3}<\varphi<-\frac{\pi}{3}$ (рис. 89) имеем

$$\operatorname{tg}\widehat{OAP}=\operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{3}+\varphi\right)=\frac{-\sqrt{3}+\operatorname{tg}\varphi}{1+\sqrt{3}\operatorname{tg}\varphi},$$

откуда

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{3R\sqrt{3}}{3R-2a\sqrt{3}},$$

и, следовательно,

$$\operatorname{tg}\widehat{OAP}=\frac{3a}{6R-a\sqrt{3}}.$$

Замечание. В двух последних случаях предполагалось, что $a\sqrt{3}\neq 6R$. Если $a\sqrt{3}=6R$, то $\widehat{OAP}=\frac{\pi}{2}$, и $\operatorname{tg}\varphi=-\frac{\sqrt{3}}{3}$, откуда $\varphi=-\frac{\pi}{6}$.

2°. **Изучение функции $y=OP+AP$.** Если $-\frac{2\pi}{3}<\varphi<0$, то

$$y=\frac{2a\sqrt{3}}{3}\left[\sin\left(\frac{\pi}{3}-\varphi\right)-\sin\varphi\right]=2a\sin\left(\frac{\pi}{6}-\varphi\right), \qquad (\alpha)$$

а если $0<\varphi<\frac{\pi}{3}$, то

$$y=\frac{2a\sqrt{3}}{3}\left[\sin\left(\frac{\pi}{3}-\varphi\right)+\sin\varphi\right]=\frac{2a\sqrt{3}}{3}\cos\left(\frac{\pi}{6}-\varphi\right). \qquad (\beta)$$

Для построения графика функции $y=y(\varphi)$ следует воспользоваться формулой (α) для полуинтервала $(-\frac{2\pi}{3}, 0]$ и формулой (β) для полуинтервала $\left[0, \frac{\pi}{3}\right)$. График построен на рис. 90. Точка $(0, a)$ является *угловой* точкой графика.

3°. **Решение уравнения $OP+AP=\frac{2ak}{\sqrt{3}}$.** Это уравнение распадается на две системы:

$$\left.\begin{aligned}&\sin\left(\frac{\pi}{6}-\varphi\right)=\frac{k}{\sqrt{3}},\\&-\frac{2\pi}{3}<\varphi\leqslant 0\end{aligned}\right\}\ (\mathrm{I})\ \text{и}\ \left\{\begin{aligned}&\cos\left(\frac{\pi}{6}-\varphi\right)=k,\\&0\leqslant\varphi<\frac{\pi}{3}.\end{aligned}\right\}\ (\mathrm{II})$$

Предположим, что $0 \leqslant k \leqslant \sqrt{3}$. Тогда из системы (I) находим

$$\frac{\pi}{6} - \varphi = \arcsin \frac{k}{\sqrt{3}}, \text{ откуда } \varphi = \frac{\pi}{6} - \arcsin \frac{k}{\sqrt{3}},$$

и

$$\frac{\pi}{6} - \varphi = \pi - \arcsin \frac{k}{\sqrt{3}}, \text{ откуда } \varphi = \arcsin \frac{k}{\sqrt{3}} - \frac{5\pi}{6}.$$

Найденные значения для φ, притом оба, дают решение уравнения тогда и только тогда, когда

$$\frac{\pi}{6} \leqslant \arcsin \frac{k}{\sqrt{3}} \leqslant \frac{5\pi}{6},$$

т. е.

$$k \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

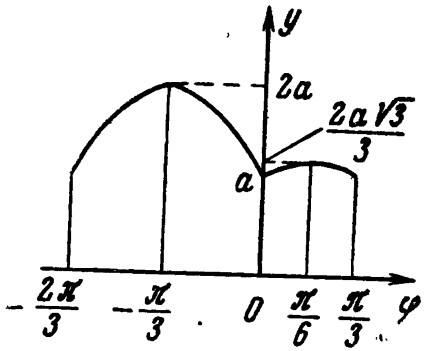

Рис. 90

Итак, система (I) имеет два решения (различные или совпадающие) при условии, что

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \leqslant k \leqslant \sqrt{3}.$$

Теперь перейдем к исследованию системы (II). Предположим, что $0 \leqslant k \leqslant 1$. Тогда

$$\frac{\pi}{6} - \varphi = \arccos k, \text{ откуда } \varphi = \frac{\pi}{6} - \arccos k,$$

либо

$$\frac{\pi}{6} - \varphi = -\arccos k, \text{ откуда } \varphi = \frac{\pi}{6} + \arccos k.$$

Найденные значения φ, притом оба, дают решение уравнения $y = OP + AP$ тогда и только тогда, когда

$$-\frac{\pi}{6} \leqslant \arccos k \leqslant \frac{\pi}{3},$$

т. е.

$$k \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

и потому

$$OG < \frac{R}{3} < GA' < \frac{2R}{3}.$$

Отсюда следует, что точка A' не совпадает с точкой O, следовательно, перпендикуляр к OA' в точке A' вполне определен.

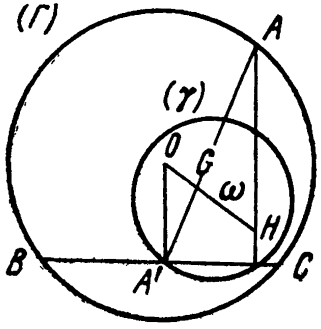

Рис. 91

С другой стороны, из треугольника $OA'G$ имеем

$$OA' \leqslant OG + GA' < R.$$

Значит, точка A' лежит внутри окружности (Г), а потому прямая, проходящая через точку A' перпендикулярно OA', пересекает окружность (Г) в двух различных точках B и C.

Итак, с *каждой* точкой A, лежащей на окружности (Г), всегда ассоциирован и притом только один треугольник T.

в) Геометрическое место точек A'. Точка A' есть образ точки A при гомотетии $\left(G, -\frac{1}{2}\right)$. Если точка A описывает целиком окружность (Г), то точка A' описывает целиком окружность (γ), являющуюся образом окружности (Г) при гомотетии $\left(G, -\frac{1}{2}\right)$. Центр ω окружности (γ) есть образ точки O при гомотетии $\left(G, -\frac{1}{2}\right)$:

$$\overrightarrow{G\omega} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GO};$$

отсюда, между прочим, следует, что радиус окружности (γ) равен $\frac{R}{2}$.

Поскольку $GO < \frac{R}{3}$, то $O\omega < \frac{R}{2}$, значит, окружность (γ) целиком лежит внутри окружности (Г). Окружность (γ) является окружностью Эйлера для всех треугольников T.

с) Ортоцентр треугольника T. Все треугольники T имеют один и тот же ортоцентр H, поскольку

$$\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}.$$

Отсюда также следует, что точка H лежит внутри окружности, описанной вокруг треугольника ABC, а потому все углы любого из треугольников T острые.

2°. а) **Соотношение, относящееся к треугольникам t.** Так как точка g есть точка пересечения медиан треугольника ABC, то, заменяя в соотношении *

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 - 3Mg^2 = gA^2 + gB^2 + gC^2$$

(M — любая точка, лежащая в плоскости треугольника ABC) точку M на точку O, получим

$$3Og^2 + gA^2 + gB^2 + gC^2 = 3R^2. \qquad (1)$$

Равенство

$$BC^2 + CA^2 + AB^2 = 9(R^2 - Og^2) \qquad (2)$$

по существу доказано в подстрочном примечании.

в) **Условие того, что треугольник t равен треугольнику T.** Так как $BC=2R\sin A$, $CA=2R\sin B$, $AB=2R\sin C$, то из соотношения (2) следует

$$Og^2 = R^2\left[1 - \frac{4}{9}(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C)\right]. \qquad (3)$$

Значит, треугольник t будет равен треугольнику T тогда и только тогда, когда $Og^2 < \frac{R^2}{9}$.

Отсюда и из соотношения (3) получаем необходимое и достаточное условие того, что треугольник t равен одному из треугольников T:

$$1 - \frac{4}{9}(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C) < \frac{1}{9},$$

или

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C > 2.$$

3°. а) **Интервал I изменения B.** Пусть заданы углы A и B. Тогда $C=\pi-(A+B)$. Так как мы предположили, что $B \leqslant C$, то $B \leqslant \pi - (A+B)$, откуда

$$B \leqslant \frac{\pi - A}{2}.$$

---

* Соотношение

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + \frac{a^2+b^2+c^2}{3} \qquad (1)$$

верно для четырех любых точек плоскости; здесь G — центр тяжести системы из трех точек, а a, b и c — соответственно длины отрезков BC, CA и AB. Соотношение (1) выводится легко, например, при помощи теоремы Стюарта. Далее, $4A'A^2 = 2b^2+2c^2-a^2$, $4B'B^2=2c^2+2a^2-b^2$, $4C'C^2=2a^2+2b^2-c^2$, где A', B', C' — соответственно середины отрезков BC, CA и AB. Складывая эти соотношения, получим

$$4AA'^2 + 4BB'^2 + 4CC'^2 = 3(a^2+b^2+c^2)$$

или $3\ (gA^2+gB^2+gC^2)=a^2+b^2+c^2$.

Итак, угол B может изменятья в полуинтервале I:

$$0 < B \leqslant \frac{\pi - A}{2}.$$

Условие, при котором треугольник t равен одному из треугольников T. Так как число k задано, то соотношение (3) можно переписать в виде

$$k^2 = 1 - \frac{4}{9}(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C). \qquad (3')$$

Но

$$\sin^2 B + \sin^2 C = \frac{1}{2}(2 - \cos 2B - \cos 2C) = 1 - \cos(B + C)\cos(B - C),$$

и так как

$$B + C = \pi - A$$

и

$$B - C = B - (\pi - A - B) = 2B + A - \pi,$$

то

$$\sin^2 B + \sin^2 C = 1 - \cos A \cos(2B + A).$$

Соотношение (3′) принимает теперь вид

$$k^2 = 1 - \frac{4}{9}[\sin^2 A + 1 - \cos A \cos(2B + A)],$$

или

$$1 + \sin^2 A - \cos A \cos(2B + A) = \frac{9}{4}(1 - k^2), \text{ где } 0 < B < \frac{\pi - A}{2}. \qquad (4)$$

Итак, треугольник t в предположении $B \leqslant C$ будет равен треугольнику T, если угол B принадлежит интервалу I и если выполнено соотношение (4).

б) Изменение функции y. Если x изменяется от 0 до $\frac{\pi - A}{2}$, то угол $2x + A$ изменяется от A до π. Значит, $\cos(2x + A)$ убывает от $\cos A$ до -1 и, значит, функция y возрастает от $1 + \sin^2 A - \cos^2 A$ до $1 + \sin^2 A + \cos A$.

Условие существования треугольников T. Так как функция y возрастает в полуинтервале I, уравнение (4) будет иметь решение и притом единственное тогда и только тогда, когда

$$1 + \sin^2 A - \cos^2 A \leqslant \frac{9}{4}(1 - k^2) \leqslant 1 + \sin^2 A + \cos A.$$

Неравенство

$$1+\sin^2 A-\cos^2 A \leqslant \frac{9}{4}(1-k^2)$$

можно переписать в виде

$$\cos^2 A \geqslant \frac{9k^2-1}{8}$$

и оно выполняется, так как $0<k<\frac{1}{3}$.

Неравенство же

$$\frac{9}{4}(1-k^2) \leqslant 1+\sin^2 A+\cos A$$

приводится к виду

$$\cos^2 A-\cos A+\frac{1-9k^2}{4} \leqslant 0,$$

или

$$\left(\cos A-\frac{1+3k}{2}\right)\left(\cos A-\frac{1-3k}{2}\right) \leqslant 0$$

и, значит,

$$\frac{1-3k}{2} \leqslant \cos A \leqslant \frac{1+3k}{2}.$$

Заметим, что в силу условия $0<k<\frac{1}{3}$,

$$0<\frac{1-3k}{2}<\frac{1+3k}{2}<1,$$

поэтому из последних неравенств следует, что

$$\arccos\frac{1+3k}{2} \leqslant A \leqslant \arccos\frac{1-3k}{2}.$$

Если $A=\arccos\frac{1+3k}{2}$, или $A=\arccos\frac{1-3k}{2}$, функция y принимает наибольшее значение, т. е.

$$B=x=\frac{\pi-A}{2} \text{ и } C=\pi-(A+B)=B,$$

следовательно, треугольник ABC равнобедренный.

Окончательно: угол A является углом треугольника T тогда и только тогда, когда он принадлежит сегменту.

$$\left[\arccos\frac{1+3k}{2},\ \arccos\frac{1-3k}{2}\right].$$

Если величина угла A совпадает с любой из границ этого сегмента, то соответствующий треугольник T равнобедренный.

5. Рассмотрим треугольник ABC, вписанный в окружность (O) радиуса R.

1°. Доказать, что точка O является центром тяжести масс, равных $\sin 2A$, $\sin 2B$ и $\sin 2C$ и сосредоточенных соответственно в вершинах A, B и C.

2°. Доказать, что если M — любая точка окружности (O), то

$$f(M) = MA^2 \cdot \sin 2A + MB^2 \cdot \sin 2B + MC^2 \cdot \sin 2C = 4S,$$

где S — площадь треугольника ABC.

Решение. 1°. Применим формулу $MG^2 = \frac{\alpha \cdot MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2}{\alpha + \beta + \gamma} - \frac{a^2\beta\gamma + b^2\gamma\alpha + c^2\alpha\beta}{(\alpha + \beta + \gamma)^2}$ (задача 6, стр. 266), полагая $\alpha = \sin 2A$, $\beta = \sin 2B$, $\gamma = \sin 2C$ и считая, что точка M совпадает с точкой O; получим

$$OG^2 = R^2 - \frac{\sin 2A \sin 2B \cdot c^2 + \sin 2B \sin 2C\, a^2 + \sin 2C \sin 2A \cdot b^2}{(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C)^2} =$$

$$= R^2\left(1 - \frac{4 \sin 2A \sin 2B \sin^2 C + 4 \sin 2B \sin 2C \sin^2 A + 4 \sin 2C \sin 2A \sin^2 B)}{16 \sin^2 A \sin^2 B \sin^2 C}\right) =$$

$$= R^2\left(1 - \frac{\cos A \cos B \sin C + \cos B \cos C \sin A + \cos C \cos A \sin B}{\sin A \sin B \sin C}\right) =$$

$$= R^2\left(1 - \frac{\cos B \sin (A + C) + \cos C \cos A \sin B}{\sin A \sin B \sin C}\right) =$$

$$= R^2\left(1 - \frac{\cos B \sin B + \cos C \cos A \sin B}{\sin A \sin B \sin C}\right) =$$

$$= R^2\left(1 - \frac{-\cos (A + C) + \cos C \cos A}{\sin A \sin C}\right) = R^2 (1 - 1) - 0,$$

т. е. точка G совпадает с точкой O.

2°, **Соотношение $f(M) = 4S$.** Выберем теперь точку M на окружности (O). Тогда

$$R^2 = \frac{f(M)}{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C} - \frac{c^2 \sin 2A \sin 2B + a^2 \sin 2B \sin 2C + b^2 \sin 2C \sin 2A}{(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C)^2},$$

$$R^2 = \frac{f(M)}{4 \sin A \sin B \sin C} - R^2 \frac{\cos A \cos B \sin C + \cos B \cos C \sin A + \cos C \cos A \sin B}{\sin A \sin B \sin C},$$

$$R^2 = \frac{f(M)}{4 \sin A \sin B \sin C} - R^2 \frac{\cos B \sin (A + C) + \cos C \cos A \sin B}{\sin A \sin B \sin C},$$

$$R^2 = \frac{f(M)}{8 \sin A \sin B \sin C}.$$

Таким образом,

$$f(M) = 8 \sin A \sin B \sin C \cdot R^2 = 8 \cdot \frac{a}{2R} \cdot \frac{b}{2R} \cdot \frac{c}{2R} = \frac{abc}{R} = 4S.$$

XXIII. Задачи по планиметрии с применением тригонометрии (для самостоятельного решения)

1. Возьмем внутри окружности (O) произвольную точку M. Пусть AB — диаметр этой окружности, проходящей через точку M, а CD — хорда, перпендикулярная к AB в точке M (C и D — концы хорды). Дано отношение m площади треугольника ADC к площади треугольника ODC.

Определить угол $\alpha=\angle BAC\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$. Провести исследование, при каких значениях m задача имеет решения и найти эти решения. Рассмотреть случай $m=3$.

Указание. Вопрос сводится к решению уравнения

$$\frac{1+\cos 2\alpha}{|\cos 2\alpha|}=m, \quad 0<\alpha<\frac{\pi}{2}.$$

Ответ. Если $0<m\leqslant 2$, задача имеет одно решение:

$$\alpha=\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1}{m+1}\right).$$

Отметим, что если $m=1$, то

$$\alpha=\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{3},$$

т. е. точка M является серединой радиуса OA.

Если $m>2$, задача имеет два решения:

$$\alpha_1=\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1}{m+1}\right) \text{ и } \alpha_2=\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{m-1}.$$

В случае $m=3$ имеем два решения:

$$\alpha_1=\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1}{4}\right), \quad \alpha_2=\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}.$$

В случае $\alpha=\alpha_1$ имеем $AM=\frac{3R}{4}$.

В случае $\alpha=\alpha_2$ точка M — середина радиуса OB.

2. 1°. В треугольнике ABC высота AA' равна радиусу R описанной окружности. Доказать, что произведение $\sin B\sin C$ постоянно.

2°. Предполагая, что в таком треугольнике $A=60°$, вычислить углы B и C.

3°. Предполагая, кроме того, что известна длина c стороны AB, вычислить длины a и b сторон BC и CA.

Ответ. 1°. $\sin B\sin C=\frac{1}{2}$. 2°. $B=\frac{\pi}{2}$, $C=\frac{\pi}{6}$. 3°. $a=c\sqrt{3}$, $b=2c$.

3. В плоскости строится полуокружность с диаметром $AB=2R$. На этой полуокружности берется переменная точка M. Положим $\angle BAM=\theta$. На перпендикуляре к плоскости (P) в точке A берется точка D, такая, что $AD=BM$.

1°. Выразить в функции R и θ полную поверхность σ тетраэдра $ABMD$.

2°. При каком значении θ имеем $\sigma=6R^2\sin\theta$?

Ответ. 1°. $\sigma=4R^2\sin\theta(1+\cos\theta)$. 2° $\theta=\frac{\pi}{3}$.

4. Доказать, что в прямоугольном треугольнике (C — прямой угол) имеет место соотношение

$$\frac{\sin^2 B}{\sin^2 A}-\frac{\cos^2 B}{\cos^2 A}=\frac{(b^2-a^2)c^2}{a^2 b^2}.$$

5. Доказать, что во всяком треугольнике имеет место соотношение

$$bc\cos^2\frac{A}{2}+ca\cos^2\frac{B}{2}+ab\cos^2\frac{C}{2}=p^2,$$

где p — полупериметр.

Указание. Перейти в этом выражении к $\cos A$, $\cos B$ и $\cos C$ и воспользоваться теоремой косинусов.

6. Острый угол прямоугольного треугольника равен α, а радиус окружности, касающейся гипотенузы и продолжений двух катетов, равен R. Найти длину гипотенузы этого треугольника.

7. Стороны параллелограмма равны a и b, а острый угол между диагоналями равен α. Найти площадь параллелограмма.

XXIV. Задачи по стереометрии с применением тригонометрии (для самостоятельного решения)

1. Радиус шара, описанного около правильной треугольной пирамиды, равен R, а двугранный угол между двумя смежными боковыми гранями равен α. Найти сторону основания пирамиды.

2. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания равна b, а угол между боковым ребром и плоскостью основания равен $\arccos\frac{2}{3}$. Плоскость, параллельная диагонали основания AC и боковому ребру BS, пересекает пирамиду так, что в сечение можно вписать окружность. Определить радиус этой окружности (найти все решения).

3. В треугольной пирамиде периметр основания равен $2p$, радиус вписанного шара равен R, а боковые грани образуют с основанием равные углы α. Найти объем пирамиды.

Ответ: $\frac{1}{3}pR^2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}$.

4. Ребро куба равно a. Через диагональ AC грани $ABCD$ проведена плоскость так, что в сечении получилась трапеция, острый

угол которой равен $\arccos\frac{1}{\sqrt{10}}$. Найти расстояние от вершины B до секущей плоскости.

Ответ. $\frac{2a}{3}$

5. В двугранный угол α вписаны два шара радиуса r, касающиеся друг друга. Найти радиус шара, касающегося граней угла и данных шаров.

6. Объем правильной треугольной призмы равен v, угол между диагоналями двух граней, проведенными из одной и той же вершины, равен α. Найти сторону основания призмы.

Указание. Рассмотреть боковую грань и сечение, проходящее через диагонали.

7. Вычислить объем правильной треугольной пирамиды, зная, что плоский угол при вершине равен α, а радиус окружности, описанной около боковой грани, равен r.

8. Конус и цилиндр имеют общее основание, а вершина конуса находится в центре другого основания цилиндра. Чему равен угол между осью конуса и его образующей, если известно, что полная поверхность цилиндра относится к полной поверхности конуса как 7 : 4.

Указание. Выразить обе поверхности через радиус основания и искомый угол.

9. В шар вписан правильный тетраэдр, затем в тетраэдр снова вписан шар. Найти отношение поверхностей двух шаров.

Указание. Выразить радиусы шаров через ребро тетраэдра.

10. На плоскости лежат три равных шара радиуса R, попарно касающиеся друг друга. Четвертый шар касается плоскости и каждого из первых трех шаров. Найти радиус четвертого шара.

Указание. Рассмотреть проекцию на плоскость, перпендикулярную данной плоскости и проходящую через центры одного из данных шаров и четвертого шара.

11. Основанием пирамиды служит квадрат. Две боковые грани перпендикулярны к плоскости основания, а две другие составляют с ней углы, равные α. Чему равен двугранный угол между этими последними гранями? Указание. Провести через диагональ основания плоскость, перпендикулярную двум наклонным граням.

12. Дан прямоугольный треугольник ASB ($\angle ASB=90°$). На перпендикуляре в точке S к плоскости этого треугольника откладывается отрезок $SC=a$. Даны углы: $\widehat{SCA}=\alpha$ и $\widehat{SCB}=\beta$.

1°. Выразить стороны треугольников SCA и SCB через a, α и β. Выразить через a, α и β длину отрезка AB.

2°. Найти $\cos\alpha\cos\beta$, если дано, что $\angle ACB=60°$.

Ответ. 1°. $SA=a\operatorname{tg}\alpha$, $SB=a\operatorname{tg}\beta$, $AC=\frac{a}{\cos\alpha}$, $CB=\frac{a}{\cos\beta}$, $AB=a\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^2\beta}$. 2°. $\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}$.

§ 10. ТЕМЫ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

Контрольная работа № 1 (вариант 1)

1. Упростить выражение

$$\frac{1-ax}{1+ax}\sqrt{\frac{1+bx}{1-bx}},\quad \text{где } x=\frac{1}{a}\sqrt{\frac{2a}{b}-1}.$$

2. Найти все действительные числа m, для которых уравнение

$$x^2-(4m+6)x+12m-16=0$$

имеет положительные корни.

3. При каких действительных m один из корней уравнения

$$(m^2-5m+3)x^2+(3m-1)x+2=0$$

вдвое больше второго?

4. Решить уравнение

$$|3x-3|-|2x+6|=1.$$

5. Решить систему уравнений

$$x+y-\sqrt{\frac{x+y}{x-y}}=\frac{12}{x-y},$$
$$xy=15.$$

6. Решить неравенство

$$\frac{|2x-1|}{x^2-x-2}\leqslant\frac{1}{2}.$$

7. Найти все корни уравнения

$$\log_4[(x-1)^{\log_4(x-1)^2}]=2.$$

8. Решить систему уравнений

$$\log_3\left(1+\frac{x}{y}\right)=3+\log_3 x,$$
$$x^2+y^2=629x^2y^2.$$

9. Решить уравнения

а) $3\cdot 16^x+36^x=2\cdot 81^x$;

б) $2\cdot\left(\frac{7^x+7^{-x}}{2}\right)^2-7\frac{7^x+7^{-x}}{2}+3=0.$

10. Решить неравенства

а) $\sqrt{7x-13}-\sqrt{3x-19}>\sqrt{5x-27}$;

б) $\log_{|x+6|}2\cdot\log_2(x^2-x-2)\geqslant 1.$

11. Найти общий член последовательности $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$, если даны два первых члена $x_1=a$, $x_2=b$ и известно, что каждый член последовательности, начиная с третьего, равен полусумме двух предыдущих:

$$x_3 = \frac{x_2+x_1}{2},\ x_4 = \frac{x_3+x_2}{2} \text{ и т. д.}$$

12. Найти все пары различных двузначных чисел, относительно которых известно следующее: цифры единиц этих чисел равны. Если первое число разделить на 9, то частное от деления равно остатку, который получится от деления второго числа на 9, и, наоборот, частное от деления второго числа на 9 равно остатку от деления первого числа на 9.

13. Река течет из A в B, расстояние между которыми равно 12 *км*. Первая лодка выходит против течения из B в A в 12 *час* дня. Через пять минут вслед за ней отправляется из B в A вторая лодка, которая догоняет первую в 1 *км* от B. Приплыв в A, вторая лодка мгновенно поворачивает обратно и встречает первую лодку в 2 *км* от A. Через 35 *мин* после того, как первая лодка придет в A, вторая лодка вернется в B. Найти время встреч обеих лодок и скорость течения реки.

14. Построить графики:

а) $y = |2x+4| - |3x+1| + |x|$;

б) $y = |x^2 - 6x + 8| - 2$;

в) $y = \log_{\frac{1}{3}} |x+1|$.

Контрольная работа № 1 (вариант 2)

1. Упростить выражение

$$y = (x + 2\sqrt{x-1})^{-\frac{1}{2}} + (x - 2\sqrt{x-1})^{-\frac{1}{2}},$$

где $x>1$ и $x\neq 2$.

2. При каких m уравнения

$$2x^2 - (3m+2)x + 12 = 0,$$
$$4x^2 - (9m-2)x + 36 = 0$$

имеют общий корень?

3. Решить уравнение

$$z^2 + |z|^2 = 0,$$

где z — комплексное число.

4. Решить неравенство

$$|3x-3|-|2x+6|\leqslant|x|.$$

5. Решить систему уравнений

$$x^{x+y}=y^{12}.$$
$$y^{x+y}=x^{3}.$$

6. Решить неравенство

$$x+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}>\frac{35}{12}.$$

7. Найти все решения неравенства

$$\frac{(1+x)(2+x)}{x^2-|x|-2}\geqslant -3x,$$

8. Найти все корни уравнения

$$\log_4[(x-1)^{\log_4(x-1)^2}]=2.$$

9. Решить систему уравнений

$$\log_4 x+2\log_4 y=0,$$
$$y^2+36x=13.$$

10. Решить уравнения:

а) $\sqrt{\sqrt{x}+1}-\sqrt{\sqrt{x}-1}=\frac{3}{2\sqrt{1+\sqrt{x}}}$;

б) $\log_2(4^x+4)=x+\log_2(2^{x+1}-3)$;

в) $2\lg(x-1)+\lg(x-30)^2=4$.

11. Решить неравенства:

а) $\log_{\sqrt{2}}(5^x-1)\cdot\log_{\sqrt{2}}\frac{2\sqrt{2}}{5^x-1}>2$;

б) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{9}}(x^2-3x+1)}<1$.

12. Даны два положительных и неравных друг другу числа a и b. Между ними вставлено n чисел (n — данное фиксированное число) так, что числа a, x_1, x_2, ..., x_n, b образуют геометрическую прогрессию. Найти произведение этих чисел

$$ax_1x_2\ldots x_nb.$$

13. Некто купил 30 птиц за 30 монет. Из числа этих птиц за каждых 3 воробьев заплачена 1 монета, за каждые 2 горлицы —

также 1 монета, за каждого голубя — 2 монеты. Сколько было птиц каждой породы?

14. Построить графики:

а) $y = |x-1| + |x-2| + |x-3|$;

б) $y = 2|x| - x^2$;

в) $y = \left|\frac{x-1}{x+1}\right| + \frac{x+3}{x+1}$.

Контрольная работа № 2 (вариант 1)

1. Решить уравнение

$$\sin x + \cos 3x = 1 - 2\sin^2 x + \sin 2x.$$

2. Решить уравнение

$$\cos^2 x + \cos x \cos y + \cos^2 y = 0.$$

3. Решить неравенство

$$\operatorname{tg} x > \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$$

4. Хорда, стягивающая дугу окружности с центральным углом α, равна b. Найти хорду, стягивающую дугу этой же окружности с центральным углом 4α.

5. В параллелограмме дан острый угол α и расстояния a и b от точки пересечения диагоналей до параллельных сторон. Вычислить диагонали и площадь параллелограмма.

6. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно a и оно наклонено к плоскости основания под углом β. Найти сторону квадратного сечения, проведенного параллельно двум непересекающимся ребрам пирамиды.

7. Дан конус, в осевом сечении которого при вершине угол α. Через вершину проведена плоскость под углом β к высоте. Найти угол между двумя образующими, по которым эта плоскость пересекает поверхность.

Контрольная работа № 2 (вариант 2)

1. Решить уравнение

$$\sin 3x \cos x = \frac{3}{2} \operatorname{tg} x.$$

2. Решить систему уравнений

$$\cos x + \cos y = a,$$

$$x + y = \frac{\pi}{4}.$$

3. Решить неравенство

$$\sin\sqrt{64-x^2}\geqslant 0.$$

4. Дана окружность радиуса R. Из ее центра проведены два радиуса OA и OB, образующие угол α. В. меньший сегмент круга, отсекаемого хордой AB, вписан равносторонний треугольник, одна из сторон которого перпендикулярна хорде AB. Найти сторону этого треугольника.

5. Основанием прямой призмы служит ромб $ABCD$ со стороной a и острым углом α ($\angle ABC=\alpha$). Найти площадь сечения, проходящего через диагональ AA' параллелепипеда параллельно диагонали BD ромба. Высота параллелепипеда равна h.

6. Ребра OA, OB, OC прямоугольного параллелепипеда равны соответственно 2, 4, 6. Найти косинус острого угла, образованного плоскостью ABC с плоскостью OAB.

7. Выразить объем сферического слоя через его высоту и радиус r среднего сечения.

Контрольная работа № 3 (вариант 1)

1. Из пункта A в пункт B выходит пешеход и одновременно навстречу ему из пункта B выезжает велосипедист. Пройдя 3 *км*, пешеход сел в попутную машину и встретил велосипедиста посредине между A и B. Если бы пешеход не воспользовался машиной, то для того чтобы встретиться с велосипедистом в том же месте, он должен был выйти на 2 *час* 40 *мин* раньше. Если бы машина выехала из A на 1 *час* 04 *мин* позднее велосипедиста из B, то их встреча произошла бы на расстоянии 15 *км* от A. Найти скорость пешехода, велосипедиста и машины, если расстояние AB равно 40 *км*.

2. Найти все действительные значения p, при которых сумма корней уравнения

$$px^2+x-8p+4=0$$

меньше 1, а их произведение больше p.

3. Решить неравенство

$$\log_8(x^2-4x+3)<1.$$

4. Решить уравнение

$$\sin 2x\sin 4x\sin 6x=\frac{\sin 4x}{4}.$$

5. Найти все решения неравенства

$$\log_{|\cos x+\sqrt{3}\sin x|}\frac{1}{2}>0$$

из промежутка $0\leqslant x\leqslant 2\pi$.

6. В треугольнике ABC из вершины C проведены высота $CD=h$ и медиана CF. Найти радиус окружности, вписанной в треугольник CFD, если углы при вершинах A и B соответственно равны α и β.

7. Из основания высоты правильной треугольной пирамиды на ее боковую грань опущен перпендикуляр, равный a. Найти объем пирамиды, если плоский угол при вершине этой пирамиды равен α.

Контрольная работа № 3 (вариант 2)

1. Если пассажир в городе A сядет в поезд, то он доберется до B через 20 *час*. Если же он полетит самолетом, то он попадет в B через 10 *час* после ухода поезда, причем ждать самолет ему придется более 2 *час*. Во сколько раз скорость самолета превышает скорость поезда, если известно, что самолет догоняет поезд через $^8/_9$ *час* после вылета?

2. Решить уравнение

$$6\sqrt[3]{x-3}+\sqrt[3]{x-2}=5\sqrt[6]{(x-2)(x-3)}.$$

3. Решить неравенство

$$2x+\sqrt{a^2-x^2}>0.$$

4. Решить неравенство

$$2\sin^2 x+2\cos 2x-(2+\sqrt{2})\cos x+\sqrt{2}>0.$$

5. Решить систему уравнений

$$\sin x+\frac{1}{\cos y}=2,$$

$$\frac{\sin x}{\cos y}=\frac{1}{2}.$$

6. В равнобедренный треугольник с основанием a вписана окружность. Найти радиус этой окружности, если расстояние между точками касания ее с боковыми сторонами треугольника равно b.

7. Из основания высоты правильной треугольной пирамиды опущен перпендикуляр на боковое ребро, равный p. Найти объем пирамиды, если двугранный угол между боковой гранью и основанием пирамиды равен α.

ОТВЕТЫ К § 1—6, 8

§ 1 Вариант 2. **5.** 6 *сек*, 4 *сек*. **6.** 7,2 кв. ед. **7.** $x=\pi k\pm\frac{\pi}{3}$, где k— любое целое число. **8.** $-2<x<-1$ и $1<x<2$.

Вариант 3. **9.** 3000 руб. 8 месяцев и 2000 руб. 1 год. **10.** $x=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$. **11.** $x=2\pi k$, $x=2\pi k-(-1)^k\frac{\pi}{2}$, где k — любое целое число. **12.** $x<\frac{5-\sqrt{13}}{2}$ и $x>\frac{5+\sqrt{13}}{2}$.

Вариант 4. **13.** 2 *м* 10 *см* и 3 *м* 60 *см*. **14.** 5 кв. ед. **15.** $x=\frac{k\pi}{2}+$ $+(-1)^k\frac{\pi}{4}$, где k — любое целое число. **16.** $x<\log_2 3$.

Вариант 5. **17.** 2 *га* и 11 *га*. **18.** 24 *см*. **19.** $x=\pi k+\frac{\pi}{4}$; $x=2\pi k\pm$ $\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}$, где k — любое целое число. **20.** $x<\frac{1}{3}$; $2<x<\frac{5}{2}$ и $x>3$.

§ 2. Вариант 2. **5.** В 2 раза. **6.** $\frac{9}{4}$ кв. ед. **7.** $x=\pi k+\frac{\pi}{2}$, $x=\pi k+$ $+\frac{\pi}{4}$, где k — любое целое число. **8.** $x<-3$ и $x>1$.

Вариант 3. **9.** На 25 *мин*. **10.** $2\sqrt{\frac{2}{3}}$. **11.** $x_1=\pi k+\frac{\pi}{4}$, $x_2=2\pi k\pm$ $\pm\frac{2\pi}{3}$, где k — любое целое число. **12.** $-4<x<-3$ и $0<x<1$.

Вариант 4. **13.** На 10 *мин*. **14.** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. **15.** $x=\frac{\pi k}{2}+\frac{\pi}{4}$, $x=2\pi k$, где k — любое целое число. **16.** $x<\log_3 2$.

Вариант 5. **17.** За 10 дней. **18.** $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ кв. ед. **19.** $x=\pi k-\frac{\pi}{4}$, $x=$ $=2\pi k\pm\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}$, где k — любое целое число. **20.** $-2\leqslant x<2$.

§ 3. Вариант 2. **5.** 6 *км/час*, 4 *км/час*; 10 *км*. **6.** $(\sqrt{3}-1)$ кв. ед. **7.** $x=\pi k-\frac{\pi}{4}$; $x=\pi k\pm\frac{\pi}{6}$, где k — любое целое число. **8.** $x=9$.

Вариант 3. **9.** 100 *км/час*. **10.** $\left(2\sqrt{3}-\frac{9}{4}\right)$ кв. ед. **11.** $x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{4}$; $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$, где k — любое целое число. **12.** $x=8$.

Вариант 4. **13.** 3 *м*³/*час*, 5 *м*³/*час* и 6 *м*³/*час*. **14.** $\frac{12}{5}$. **15.** $x=\pi k+\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{2\pi k}{5}$, где k — любое целое число. **16.** 32.

Вариант 5. **17.** 2 *час*. **18.** $\frac{9\sqrt{7}}{16}$. **19.** $x=\frac{\pi k}{3}$, где k — любое целое число. **20.** $x=3$.

§ 4. Вариант. 2. **5.** В 4 раза. **6.** $V=\frac{2}{3}h^3\operatorname{tg}\varphi\cdot\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$. **7.** $x=\frac{\pi k}{2}$; $x=\pi k\pm\frac{\pi}{3}$, где k — любое целое число. **8.** $x<-2$, $x>\log_2\frac{4}{3}$.

Вариант 3. **9.** $\frac{1080}{11}$; $\frac{1350}{11}$; $\frac{27}{11}$. **10.** $V=S\sqrt{\frac{S\cos\alpha}{\sqrt{3}}}\cdot\sin\alpha$ **11.** $x=\pi k$; $x=\pi k+(-1)^k\frac{\pi}{6}$, где k — любое целое число. **12.** $-1\leqslant x<0$ и $3<x\leqslant 4$.

Вариант 4. **13.** В 2,5 раза. **14.** $V=2\sqrt{\sin^3\frac{\varphi}{2}\cdot\sin 3\frac{\varphi}{2}}$. **15.** $x=\pi k+\frac{\pi}{4}$; $x=\frac{\pi k}{2}+\frac{\pi}{12}$, где k — любое целое число. **16.** $0<x<1$ и $x\geqslant 2$.

Вариант 5. **17.** В 3 раза. **18.** $\sin\varphi=\frac{2\sqrt{2}}{3}$. **19.** $x=4\pi k$; $x=4\pi k\pm\frac{2\pi}{3}$, где k — любое целое число. **20.** $-1\leqslant x\leqslant 1$.

§ 5. Вариант 2. **5.** 1000 заявлений. **6.** $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$, $k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$ **7.** $\frac{\sqrt{3}}{8}(9+3\sqrt{5})$, **8.** $0<y<1$.

Вариант 3. **9.** $AC=45$ *км*. **10.** $x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$, $k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$ **11.** $4\sqrt{2}$. **12.** $\frac{1}{2}<x<1$.

Вариант 4. **13.** $AB=20$ *км*. **14.** $x=k\pi$, $x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+(k+1)\pi$, $k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$ **15.** 3. **16.** $x>3$.

§ 6. Вариант 3. **11.** $a=243$ *л*. **12.** $0<x<\frac{1}{2}$; $1<x<3$. **14.** $a=-5$, $b=4$. **15.** $\left(\frac{abc}{ab+bc+ac}\right)^3$.

Вариант 4. **16.** Первого сплава 9 частей, второго 35. **17.** Если $a>1$, то $a^{-\sqrt{3}}<x<a^{\sqrt{3}}$; если $0<a<1$, то $a^{\sqrt{3}}<x<a^{-\sqrt{3}}$. **18.** $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k$, $x=\frac{\pi}{6}+k\pi$, $x=\frac{5}{6}\pi+k\pi$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ **19.** $x=0$. **20.** $\frac{r}{6}\cdot(3\sqrt{6}+3\sqrt{2}+4\sqrt{3})$.

§ 8. (вечернее и заочное отделения).

Вариант 1. **1.** $v=7$ *км/час*. **2.** $y=2\pi k$, $y=\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{8}$, $y=2m\pi-\frac{\pi}{2}$, где k, n, m принимают все целые числа. **3.** $V=\frac{4}{3}H^3\frac{\sin\frac{\varphi}{2}\cdot\sin\frac{\psi}{2}}{\cos\frac{\varphi+\psi}{2}\cdot\cos\frac{\varphi-\psi}{2}}$. **4.** $x\leqslant -4$, $-1<x<2$ и $x\geqslant 5$.

Вариант 2. **5.** 20 *м* и 15 *м*. **6.** $t=\pi k+\operatorname{arc\,tg}(1\pm\sqrt{3})$, где k — любое целое число. **7.** $V=\frac{l}{3}2pq-\frac{2l^3}{3}\cdot\frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}}$. **8.** $x<-7$; $-5<x\leqslant -2$ и $x\geqslant 4$.

Вариант 3. **9.** 26 *час* и 33 *час*. **10.** $z=\frac{2}{3}\pi k+\frac{\pi}{9}$; $z=2\pi n-\frac{\pi}{3}$, где k и n принимают все целые значения. **11.** $\operatorname{tg}\frac{\angle AOC}{2}=\sqrt{-\cos 2\gamma}$. **12.** Отрицательных решений нет.

Вариант 4. **13.** 80 *км/час* и 120 *км/час*. **14.** $x=k\pi\pm\frac{\pi}{3}$, где k — любое целое число. **15.** $V=d\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$. **16.** $-\sqrt{13}<x\leqslant 1$ и $2\leqslant x<\sqrt{13}$.

Вариант 5. **17.** $\varphi_1=\pi k-\frac{\pi}{4}$, $\varphi_2=2\pi k+\frac{\pi}{2}$ и $\varphi_3=2\pi k$, где k — любое целое число. **18.** $k\pi-\frac{\pi}{4}$, $k\pi-\frac{\pi}{4}+(-1)^k\frac{\pi}{4}$. **19.** $\left(\sqrt{a}+\frac{\sqrt{c}}{2}\right)^2$. **20.** $\frac{1+\sqrt{5}}{2}<x<2$.

Борис Иванович Александров,
Петр Сергеевич Моденов

ПОСОБИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ
ДЛЯ ПОДГОТОВИТЕЛЬНЫХ КУРСОВ
МГУ

заказное

Редактор *Т. Г. Батенина* Технический редактор *Г. И. Георгиева*
Корректоры *С. С. Мазурская, М. И. Эльмус, Е. П. Утанина, И. С. Хлыстова*

Сдано в набор 28/XII Подписано к печати 24/VII 1967 г.
Л-95651 Формат $60\times90^1/_{16}$ Бумага типогр. № 3 Физ. печ. л. 20,0
Уч.-изд. л. 15,86 Изд. № 37/зак.
Заказ 351 Тираж 40.000 Цена 70 коп.

Издательство Московского университета
Москва, Ленинские горы, Административный корпус.
Типография Изд-ва МГУ. Москва, Ленинские горы